

colorchecker CLASSIC



+ x-rite

+ mm

P.  
9



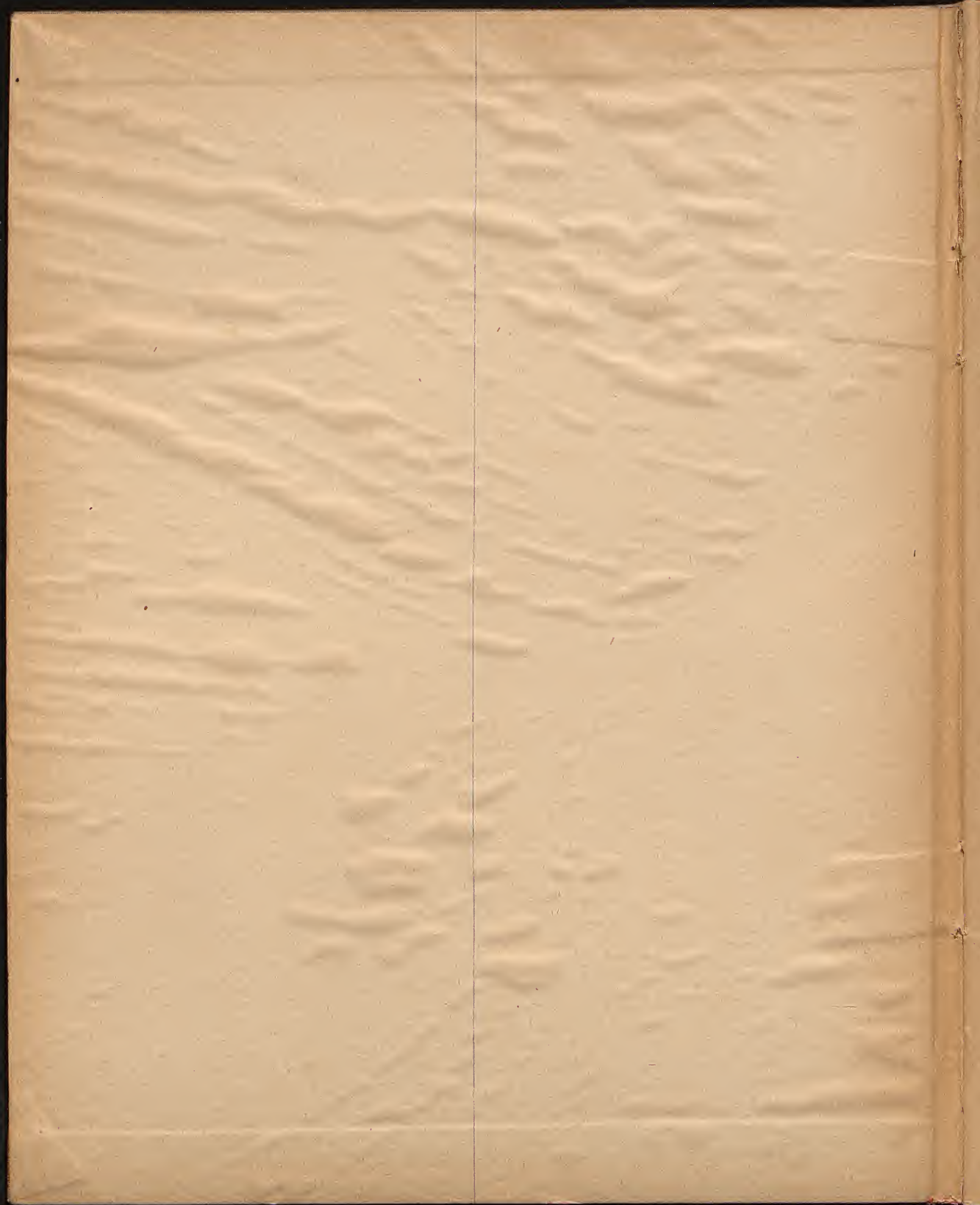
*Calcul intégral*

*Cours de M. Picard  
à la Faculté des Sciences  
1891 - 1892.*

*2<sup>e</sup> cahier Louis Couturat*

Papeterie Générale des Écoles, 80, Boul. St-Germain







Cours de Calcul intégral  
professé par M. Picard  
à la Faculté des sciences  
1891-1892.

III.



# Table

Développements en série (suite)	page 1
Série trigonométrique de Fourier	7
Intégrales triples et superficielles (th. de Kronecker)	17
Fonctions analytiques de 2 variables complexes	36
Fonctions non uniformes d'une variable complexe :	
périodes de l'intégrale elliptique du 1 <sup>er</sup> espèce	59
Théorie des équations différentielles	85
Equation différentielle ordinaire du 1 <sup>er</sup> ordre	"
Système de $n$ équations différentielles du 1 <sup>er</sup> ordre	109
Système de $n$ équations aux dérivées partielles	119



# Développements en série (Cauchy, Fourier.)

Nous avons montré que, en supposant que la variable complexe  $z$  croisse indéfiniment par la suite de valeurs absolues:  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  et que, en posant:

$$F(z) = \frac{\psi(z) \varphi(z, x)}{\pi(z)}$$

la quantité:  $\frac{1}{2} [z F(z) - z F(-z)]$

ait pour limite en général la constante  $F$ , fonction de la variable réelle  $x$ , on a une formule qui permet de développer cette fonction en une somme des résidus de  $F(z)$ :

$$F(x) = \sum \frac{\psi(\lambda) \varphi(\lambda, x)}{\pi'(\lambda)}$$

où  $\lambda$  est un quelconque des racines de l'équation transcendante:  $\pi(z) = 0$ .

Nous allons calculer maintenant cette limite  $F(x)$ .

Nous avons fait les hypothèses suivantes:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\psi(-z)}{\pi(-z)} = c \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} = 0$$

Nous avons supposé en outre:

$$\varphi(z, x) = \int_{x_0}^x e^{z(x-\mu)} f(\mu) d\mu$$

et nous avons prouvé que le produit:

$$z \int_{x_0}^x e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu) d\mu \quad x > x_0$$

reste fini quand  $z$  augmente indéfiniment par les valeurs susdites. On s'est donné la fonction  $f(x)$  arbitrairement, à la condition qu'elle n'ait qu'un nombre limité de maxima et de minima.

Cela posé, l'expression:  $\frac{1}{2} [z \Phi(z) - z \Phi(-z)]$  ( $z > 0$ ) devient:

$$\frac{z}{2} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} \int_{x_0}^x e^{z(x-\mu)} f(\mu) d\mu - \frac{z}{2} \frac{\psi(-z)}{\pi(-z)} \int_{x_0}^x e^{-z(x-\mu)} f(\mu) d\mu.$$

Le 1<sup>er</sup> terme peut s'écrire, en faisant sortir la constante  $e^{zx}$  du signe  $\int$ :

$$\frac{z}{2} \left[ \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} \right] \int_{x_0}^x e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu) d\mu$$

Il tend en général vers zéro, car:  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} = 0$ ,  
et d'autre part:  $z \int_{x_0}^x e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu) d\mu$  reste fini —

Donc le 2<sup>e</sup> terme a pour limite  $F(x)$ ; or:  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi(-z)}{\pi(-z)} = c$ ,  
on peut écrire:  $-\frac{c}{2} \lim_{z \rightarrow \infty} z \int_{x_0}^x e^{-z(x-\mu)} f(\mu) d\mu = F(x)$

Cherchons cette limite pour  $z$  croissant indéfiniment par les modules  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  et ayant toujours la partie réelle positive, non nulle. Quand  $z$  est très grand, tous les éléments de l'intégrale tendent vers 0, sauf celui où  $\mu = x$  (limite supérieure).

Partageons donc l'intégrale à étudier en 2 parties:

$$z \int_{x_0}^{x-\varepsilon} e^{-z(x-\mu)} f(\mu) d\mu + z \int_{x-\varepsilon}^x e^{-z(x-\mu)} f(\mu) d\mu$$

$\varepsilon$  étant une quantité positive fixe, choisie aussi petite qu'on veut —  
Le 1<sup>er</sup> intégral a pour limite zéro, comme nous venons de le dire —  
Nous n'avons donc plus à considérer que la 2<sup>e</sup>, qui seule représente  
à la limite  $F(x)$ .



Elle se double à son tour, si l'on pose l'identité:

$$f(\mu) = f(x) + [f(\mu) - f(x)]$$

$$f(x) \int_{x-\varepsilon}^x z e^{-z(x-\mu)} d\mu + \int_{x-\varepsilon}^x z e^{-z(x-\mu)} [f(\mu) - f(x)] d\mu$$

La 1<sup>re</sup> intégrale est aisée à calculer; l'intégrale indéfinie est:

$e^{-z(x-\mu)}$  Prise entre  $(x-\varepsilon)$  et  $x$ , elle donne:

$f(x)(1 - e^{-z\varepsilon})$  qui tend vers  $f(x)$  quand  $z$  augmente indéfiniment en dehors de la arc des  $y$  (comme nous l'avons supposé.)

Quant à la 2<sup>e</sup> intégrale, on va démontrer qu'elle tend vers 0 avec  $\varepsilon$  au moyen du théorème de la moyenne. En effet, on peut toujours prendre  $\varepsilon$  assez petit pour que  $f(\mu)$  n'ait ni maximum ni minimum dans l'intervalle  $(x-\varepsilon)$  à  $x$ , en d'autre toujours dans le même sens; supposons qu'elle aille en décroissant. On peut poser:

$$ze^{-z(x-\mu)} = P + Qi$$

et appliquer le théorème de la moyenne aux 2 intégrales réelles ainsi obtenues:

$$\int_{x-\varepsilon}^x P [f(\mu) - f(x)] d\mu = [f(x-\varepsilon) - f(x)] \int_{x-\varepsilon}^x P d\mu$$

$$\text{où: } x-\varepsilon < \xi < x$$

Or la différence entre crochets tend vers 0 avec  $\varepsilon$ , la fonction  $f(x)$  étant supposée continue; d'autre part, l'intégrale  $\int_{x-\varepsilon}^x P d\mu$  reste finie, car c'est la partie réelle de:

$$\int_{x-\varepsilon}^{\xi} z e^{-z(x-\mu)} d\mu = e^{-z(x-\xi)} - e^{-z\varepsilon}$$



quantité finie, essentiellement positive, au plus égale à 1 (pour  $\xi = x$ )  
 Dans la 2<sup>e</sup> intégrale tend vers 0 avec  $\varepsilon$ , et il reste finalement:

$$F'(x) = -\frac{c}{2} f(x)$$

Nous avons supposé que  $x$  s'éloigne à l'infini en dehors de l'axe des  $y$ . S'il suivait l'axe des  $y$ , on verrait, en appliquant encore le théorème de la moyenne, que l'expression n'a pas pour limite  $f(x)$ , mais qu'elle reste finie; aussi l'axe  $Oy$  est une des directions exceptionnelles que nous avons prévues et admises, sur lesquelles le produit  $xF(x)$  prend des valeurs singulières différentes de  $F'$ , mais finies; cela n'infirme donc nullement le résultat général que nous venons d'obtenir.

Nous avons aussi supposé que la fonction  $f(x)$  était continue; mais il suffit qu'elle n'ait qu'un nombre limité de discontinuités, et qu'elle reste finie en ces points singuliers. Soit  $a$  une des valeurs de  $x$  qui rendent  $f(x)$  discontinue. On ne pourra plus parler de la valeur de  $f(a)$ ; mais on connaît les valeurs limites de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $a$  par des valeurs inférieures ou supérieures; on les désigne, avec <sup>Peano</sup> ~~Dirichlet~~ par les symboles:

$$f(a-\eta), \quad f(a+\eta)$$

Supposons que  $x$  soit un point de discontinuité pour  $f(x)$ ; le résultat précédent ne sera pas troublé, car si l'on tend vers  $x$  par des valeurs inférieures et ne le dépassant pas,  $f(\mu)$  sera déterminée dans tout l'intervalle  $(x_0, x)$ ; en  $x$  elle prendra la valeur  $f(x-\eta)$ ; on aura donc:

$$F'(x) = -\frac{c}{2} f(x-\eta)$$

On a vu qu'on peut développer  $F$ , et par conséquent  $f$  en une série:

$$-\frac{c}{2} f(x) = \sum \frac{\psi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} \int_{x_0}^x e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu) d\mu$$



où la somme  $\Sigma$  est étendue à toutes les racines  $\lambda$  de l'équation transcendante:  
 $\Pi(z) = 0$  (en nombre infini)

Seulement la forme du terme général est compliquée, car  $x$  est engagé dans l'intégrale - Cauchy est parvenu à obtenir des exponentielles  $e^{\lambda x}$  en dehors du signe  $\int$  en combinant avec ce développement un autre développement analogue. Pour cela, il prend les nouvelles fonctions:  

$$F(z) = \frac{\chi(z) \varphi(z, x)}{\Pi(z)} \quad \varphi(z, x) = \int_x^{\infty} e^{z(x-\mu)} f(\mu) d\mu$$
  
 où:  $x < x_1$

sur lesquelles il fait les hypothèses:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\chi(z)}{\Pi(z)} = C \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\chi(-z)}{\Pi(-z)} e^{z(x_1-x)} = 0 \quad (\text{en général})$$

On obtient pour  $F(x)$ , l'expression de:  $\frac{1}{2} [z F(z) - z F(-z)]$   
 par des calculs tout semblables aux précédents, l'expression:  

$$+ \frac{C}{2} f(x)$$

D'où le développement analogue:

$$\frac{C}{2} f(x) = \sum \frac{\chi(\lambda)}{\Pi(\lambda)} \int_x^{\infty} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu) d\mu$$

Faisons une hypothèse complémentaire sur les fonctions  $\psi$  et  $\chi$ :

$$\psi(z) + \chi(z) = \Pi(z)$$

$$\text{d'où: } \psi(-z) + \chi(-z) = \Pi(-z)$$

$$\frac{\psi(-z)}{\Pi(-z)} + \frac{\chi(-z)}{\Pi(-z)} = 1$$

Où  $\frac{\chi(-z)}{\Pi(-z)}$  a pour limite 0, car ce rapport tend vers 0 avec le facteur  $e^{z(x_1-x)}$  qui tend vers l'infini avec  $z$ ;

donc :  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\phi(-z)}{\pi(-z)} = c = 1$  et de même :  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} = C = 1$ .

On a aussi :  $\phi(\lambda) + \chi(\lambda) = \pi(\lambda) = 0$

Donc les coefficients correspondants dans les développements sont égaux et de signes contraires. Retractions le 1<sup>er</sup> du 2<sup>e</sup> pour avoir

$$f(x) : f(x) = \sum \frac{\chi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu) d\mu = - \sum \frac{\phi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu) d\mu$$

ou :

$$f(x) = - \sum \frac{\phi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} e^{\lambda x} \int_{x_0}^{x_1} e^{-\lambda \mu} f(\mu) d\mu = \sum_{\lambda} A e^{\lambda x}$$

On a ainsi le développement cherché de  $f(x)$  par une série d'exponentielles, où  $\lambda$  est une quelconque des racines de l'équation :  $\pi(z) = 0$ .

Pour cela il suffit d'avoir une suite de valeurs absolues  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  telle que l'on puisse trouver des fonctions  $\phi$  et  $\chi$  ( $\pi(z) = \phi(z) + \chi(z)$ ) vérifiant les 4 conditions :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\phi(-z)}{\pi(-z)} = 1 \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\phi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} = 1 \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} e^{z(x_1-x)} = 0$$

Si  $f(\mu)$  est discontinue, mais finie, pour  $\mu = x$ , on aurait dans le 1<sup>er</sup> développement la valeur :  $f(x-\eta)$  dans le 2<sup>e</sup> :  $f(x+\eta)$ , et dans le développement total, la valeur moyenne :  $\frac{f(x-\eta) + f(x+\eta)}{2}$

Nous allons donner quelques exemples de ces développements ; la série de Fourier en est le cas particulier le plus important.



Série de Fourier. Prenons:  $\psi(z) = -1$   $\chi(z) = e^{az}$   $a > 0$   
 et par conséquent:  $\Pi(z) = e^{az} - 1$ .

Voyons si les conditions précédentes sont vérifiées. Les racines de l'équation:  
 $\Pi(z) = 0$   $e^{az} = 1$  sont:  $z = \frac{2K\pi i}{a}$   $K = 1, 2, 3, \dots$

On prendra pour valeurs successives des rayons:  $\frac{(2n+1)\pi}{a}$   $n = 1, 2, 3, \dots$   
 afin d'éviter les racines de  $\Pi$ , ou pôles de  $\Phi(z)$ .

$\frac{\psi(-z)}{\Pi(-z)} = \frac{-1}{e^{-az} - 1}$  Si  $z$  augmente indéfiniment en dehors de  $Oy$ ,  
 $e^{-az}$  tend vers 0, et le rapport vers 1.

Si  $z$  tend vers l'infini suivant  $Oy$ , comme il prend seulement les  
 valeurs:  $\frac{(2n+1)\pi i}{a}$ , on a:  $e^{-az} = -1$  donc:

$\lim \frac{\psi(-z)}{\Pi(-z)} = \frac{1}{2}$  limite finie -

$$\frac{\psi(z)}{\Pi(z)} e^{z(x-x_0)} = \frac{-e^{z(x-x_0)}}{e^{az} - 1} = \frac{-e^{z(x-x_0-a)}}{1 - e^{-az}}$$

Si l'on a:  $x < x_0 + a$ , la limite sera 0 quand  $z$  suivra  
 une direction différente de  $Oy$ . Si  $z$  est sur  $Oy$ , on a au numérateur  
 $e^{\frac{x-x_0-a}{a}}$  quantité fixe, et au dénominateur 2; la limite  
 est donc finie.

$$\frac{\chi(z)}{\Pi(z)} = \frac{e^{az}}{e^{az} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-az}}$$

cà d: 1 — en général, et:  $\frac{1}{2}$  pour  $z$  sur  $Oy$

$$\frac{\chi(-z)}{\Pi(-z)} e^{z(x_1-x)} = \frac{e^{-az}}{e^{-az} - 1} \times e^{z(x_1-x)} = \frac{e^{z(x_1-x-a)}}{e^{-az} - 1}$$

Mêmes limites que pour  $\frac{\psi(-z)}{\Pi(-z)}$

Si donc:  $x_1 < x+a$ , la limite sera 0 si  $x$  est en dehors de  $Oy$ ,  
 elle restera finie si  $x$  est sur  $Oy$ . Rapprochons cette condition de la  
 précédente:  $x < x_0 + a$   $x_0 + a \geq x > x_1 - a$

Revenons pour simplifier:  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = a$ ; on doit avoir:  
 $0 < x < a$  Si cette double inégalité est satisfait, les 4  
 conditions sont remplies. On aura le développement en série trigo-  
 nométrique qui s'appelle la formule de Fourier; calculons:

$$\frac{\psi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} = \frac{-1}{ae^{a\lambda}} = \frac{-1}{a} \quad \text{de même: } \frac{\chi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} = \frac{e^{a\lambda}}{ae^{a\lambda}} = \frac{1}{a}; \text{ d'où:}$$

$$f(x) = \frac{1}{a} \sum e^{\frac{2k\pi i \cdot x}{a}} \int_0^a e^{-\frac{2k\pi i \cdot \mu}{a}} f(\mu) d\mu$$

$k$  prenant toutes les valeurs entières, positives et négatives. Groupons  
 les termes égaux et de signes contraires; on aura:

$$\frac{1}{2} \left[ e^{\frac{2k\pi i}{a}(x-\mu)} + e^{-\frac{2k\pi i}{a}(x-\mu)} \right] = \cos \frac{2k\pi}{a}(x-\mu)$$

sauf pour  $k=0$ , où l'on a simplement 1; ce qui donne:

$$f(x) = \frac{1}{a} \int_0^a f(\mu) d\mu + \sum_{k=1}^{k=\infty} \int_0^a \cos \frac{2k\pi}{a}(x-\mu) f(\mu) d\mu$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left[ a_k \cos \frac{2k\pi x}{a} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{a} \right]$$

Cette fonction est continue dans l'intervalle  $(0, a)$  et admet la période  
 $a$ ; on peut prendre les intégrales dans n'importe quel intervalle de  
 longueur  $a$ . Seulement,  $f(0)$  et  $f(x)$  est discontinue en  $0, a, 2a, \dots$   
 car elle a en ces points à la fois les 2 valeurs  $f(0)$  et  $f(a)$  qui



coïncident. Si l'on fait  $x = a$  dans la série trigonométrique, on trouve la valeur moyenne:  $\frac{f(0) + f(a)}{2}$

Autre exemple: Prenons:  $\Pi(z) = z(e^{az} + e^{-az}) + h(e^{az} - e^{-az})$   
 $\chi(z) = e^{az}(z+h)$   $\psi(z) = e^{-az}(z-h)$

a et h étant des quantités fixes essentiellement positives.

On prendra pour  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  des valeurs telles que sur le cercle de rayon  $z_n$  la fonction  $\Pi(z)$  ne s'annule jamais; pour cela, il suffira de poser:  $z_n = \frac{n\pi}{a}$

Sur Oy,  $z = \frac{n\pi i}{a}$   $2az = 2n\pi i$  donc:  $e^{2az} = 1$ .

$\Pi(z)$  ne s'annule donc pas sur les cercles de rayon  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$

Verifions maintenant les conditions imposées à  $\psi, \chi$  et  $\Pi$ .

$$\frac{\psi(-z)}{\Pi(-z)} = \frac{e^{az}(-z-h)}{e^{-az}(-z+h) + e^{az}(-z-h)} = \frac{1}{1 + e^{-2az} \frac{z-h}{z+h}}$$

$e^{-az}$  tend vers 0 quand  $z$  augmente indéfiniment; donc le rapport précédent tend vers 1. — Cela n'a pas lieu sur Oy; mais en faisant  $z = yi$ , on voit que le quotient tend vers la limite finie  $\frac{1}{2}$ .

On prouve de même que:

$$\lim \frac{\chi(z)}{\Pi(z)} = 1$$

D'autre part:

$$\frac{\psi(z)}{\Pi(z)} e^{z(x-x_0)} = \frac{e^{-az}(z-h) e^{z(x-x_0)}}{e^{az}(z+h) + e^{-az}(z-h)} = \frac{e^{z(x-x_0-2a)}(z-h)}{(z+h) + e^{-2az}(z-h)}$$

Ce rapport a pour limite 0 à la condition:  $x < x_0 + 2a$ .

$$\frac{\chi(-z)}{\Pi(-z)} e^{z(x_1-x)} = \frac{e^{-az}(-z+h) e^{z(x_1-x)}}{e^{-az}(-z+h) + e^{az}(-z-h)} = \frac{e^{z(x_1-x-2a)}(-z+h)}{e^{-2az}(-z+h) + (-z-h)}$$

Ce rapport a pour limite 0 à la condition:  $x > x_1 - 2a$ .



On a donc la double condition:  $x, -2a < x < x_0 + 2a$ .

Posons:  $x_0 = -a, x_1 = +a; \quad -a < x < +a$ .

Ainsi  $x$  doit rester compris dans l'intervalle  $(x_0, x_1)$  d'étendue  $2a$ .

Reste à trouver les racines de l'équation transcendante:  $\Pi(z) = 0$ .

Faisons le changement de variables:  $ax = ix$

L'équation devient:  $\frac{ix}{a}(e^{ix} + e^{-ix}) + h(e^{ix} - e^{-ix}) = 0$

Où:  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{i} \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}} \quad \frac{ix}{a} + hi \operatorname{tg} x = 0.$

$x + ah \operatorname{tg} x = 0 \quad \text{ou:} \quad \operatorname{tg} x + Hx = 0 \quad H > 0. \quad \left(\frac{1}{ah}\right)$

Telle est l'équation:  $\Pi(z) = 0$ , sous sa formule plus simple, que Fourier a rencontrée et étudiée dans la théorie de la chaleur.

On va prouver qu'elle n'a que des racines réelles, et qu'elle en a un nombre infini. — Faisons la substitution:  $x = \alpha + \beta i$

L'équation devient:  $\frac{\sin(\alpha + \beta i)}{\cos(\alpha + \beta i)} + H(\alpha + \beta i) = 0$

$\frac{\sin(\alpha + \beta i) \cos(\alpha - \beta i)}{\operatorname{mod}^2[\cos(\alpha + \beta i)]} + H(\alpha + \beta i) = 0 \quad \text{On a au numérateur:}$

$(\sin \alpha \cos \beta i + \cos \alpha \sin \beta i)(\cos \alpha \cos \beta i + \sin \alpha \sin \beta i) = \sin \beta i \cos \beta i = \frac{1}{2} \sin 2\beta i$

Egalons séparément à 0 la partie imaginaire du 1<sup>er</sup> membre:

$\frac{\frac{1}{2} \sin 2\beta i}{\operatorname{mod}^2[\cos(\alpha + \beta i)]} + H\beta i = 0 \quad \text{équation réelle, } i \text{ étant facteur.}$

Or cette égalité est impossible, car  $H > 0$ :

$\frac{\sin 2\beta i}{2\beta i}$  devrait être négatif, ce qui ne se peut, car on a:  $\frac{\sin \alpha i}{\alpha i} = 1 + \frac{\alpha^2}{3!} + \frac{\alpha^4}{5!} + \dots$  essentiellement positif.



On doit donc avoir:  $\beta = 0$ , c'à d. qu'il n'y a pas de racine imaginaire.  
D'ailleurs l'équation a une infinité de racines réelles, car  $\Pi(z)$  a une infinité de termes et un degré infini. D'ailleurs, si l'on construit la courbe:  $y = \tan x$

elle a une infinité de branches comprises entre les asymptotes  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{(2K+1)\pi}{2}$ , et elle a une infinité de points d'intersection avec la droite:  $y = -\Pi x$

Chaque point d'intersection est compris entre 2 asymptotes, et tend vers une des asymptotes quand  $K$  croît indéfiniment. Ainsi les racines de  $\Pi(z) = 0$  sont séparées.

On a alors pour une fonction continue de la variable réelle  $x$ ,  $f(x)$ , pour les valeurs de  $x$  comprises entre  $-a$  et  $+a$ , le développement en série:  $f(x) = \sum A e^{\lambda x}$   $\lambda$  racine de l'équation:  $\Pi(z) = 0$ .

Posons:  $z = \zeta i$   $f(x) = \sum A e^{\lambda i x}$   $\lambda$  racine de l'équation:  $\Pi(\zeta i) = 0$ ,

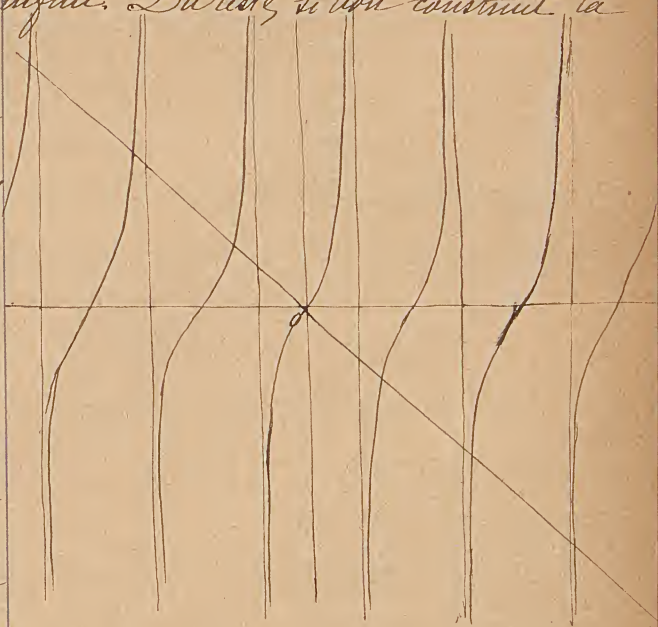
$$\text{ou: } \zeta \cos a \zeta + b \sin a \zeta = 0$$

équation qui a toutes ses racines réelles. Quant aux coefficients  $A$ , on les trouve par la formule générale; on a ainsi, en faisant  $z = \zeta i$ ,

$$\text{la série trigonométrique: } f(x) = \sum (A \cos a \lambda + B \sin a \lambda)$$

analogue à la série de Fourier, si ce n'est que  $\lambda$ , au lieu d'être un multiple d'un arc, est une racine d'une équation transcendante:

$$\Pi(\zeta i) = 0.$$





Ces racines étant égales et de signes contraires deux à deux, on peut les grouper, en mettant à part la racine  $\lambda=0$ , et l'on obtient le développement :

$$f(x) = \frac{b}{2(1+ah)} \int_{-a}^{+a} f(\mu) d\mu + \sum \frac{2\lambda}{2a\lambda - \sin 2a\lambda} \int_{-a}^{+a} \cos \lambda(x-\mu) f(\mu) d\mu.$$

on n'en fait figurer que les racines positives. Le  $\cos \lambda x$  peut d'ailleurs sortir de l'intégrale avec  $\sin \lambda x$ , et l'on aura une série ordonnée suivant les sinus et cosinus de  $x$  multiplié non plus par un nombre entier, mais par les racines positives de l'équation :

$$\Pi(\zeta i) = 0.$$

Si l'on fait dans ces formules :  $b = \infty$ , on retrouve la série de Fourier. Ainsi elle n'est qu'un cas particulier du développement que nous venons d'obtenir.

Il est intéressant de savoir comment Fourier a été conduit à trouver ce développement. Il a étudié le problème du refroidissement d'une sphère homogène -

Étant donné un système isotrope (où la chaleur se communique uniformément) on représente la température de chaque point par une fonction :

$$V(x, y, z, t) = 0$$

de la position de ce point et du temps; cette fonction doit satisfaire à la condition analytique :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)$$

Cette fonction se détermine par les conditions aux limites; on se donne l'état initial du corps, c'est-à-dire la valeur de  $V$  en chaque point pour  $t=0$ ;

$$V(x, y, z, 0) = F(x, y, z)$$

On suppose le corps plongé dans un milieu indéfini de température fixe  $0^\circ$  par exemple; la déperdition de chaleur, qui a lieu par la surface, est



déterminé par la loi de Newton:  $\frac{dV}{dn} = -hV$

$\frac{dV}{dn}$  désignant la dérivée prise suivant la normale intérieure; d'où l'équation:  $\frac{dV}{dn} + hV = 0$

qui doit être vérifiée en tous les points de la surface et pour toutes les valeurs du temps.

Dans le cas d'une sphère pleine, on admet que la température est la même sur toute sphère intérieure concentrique, de sorte que la température est seulement fonction du temps et de la distance du point au centre pris pour origine.  $V(r, t)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

L'équation différentielle devient:  $\frac{\partial V}{\partial t} = K \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right)$

L'équation à la surface devient:

$$\frac{dV}{dr} + hV = 0$$

Elle doit être vérifiée pour:  $r = R$ .

Enfin l'équation à la limite devient:  $V(r, 0) = F(r)$ .

$F(r)$  donnant la température initiale de toutes les sphères concentriques  $r$  variant de 0 à  $R$ . Telle sont les données du problème analytique que Fourier avait à résoudre.

Posons d'abord:  $y = Vr$

L'équation différentielle se réduit à:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = K \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$$

Fourier cherche des solutions simples de cette équation différentielle, au moyen desquelles il formera ensuite l'intégrale générale. Pour

celà, on pose:  $y = e^{-km^2 t} \times u$   $u$  ne dépendant que de  $r$ ;

$$-km^2 u = K \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad \text{d'où:} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + m^2 u = 0$$

Cette équation différentielle admet la solution:  $u = A \cos mr + B \sin mr$   
 $A$  et  $B$  étant des constantes arbitraires d'intégration.



On obtient ainsi la solution particulière:  $y = (A \cos mr + B \sin mr) e^{-km^2 t}$   
 valables quelles que soient les constantes  $A, B$  et  $m$ . On aura la fonction  
 cherchée par la formule:  $V = \frac{y}{z}$

Or on ne doit pas conserver dans la solution particulière le cosinus,  
 car alors  $V$  deviendrait infinie pour  $z=0$ , ce qui est physiquement  
 impossible; on fera donc:  $A=0$ . On a donc la solution particulière:

$$V = \frac{e^{-km^2 t} \sin mr}{z} \quad \text{la constante } m \text{ étant quelconque.}$$

Mais on peut choisir  $m$  de manière que  $V$  vérifie l'équation à  
 la surface. Portons les valeurs de  $V$  et de  $\frac{dV}{dz}$  dans cette équation,  
 le temps disparaît; faisons  $z=R$ ; il vient:

$$\tan mR + \frac{mR}{hR-1} = 0$$

nous supposons:  $hR > 1$ ,

ce qui revient à faire  $R$  suffisamment grand. C'est une équation  
 où  $R$  est une donnée, et  $m$  l'inconnue. Elle a une infinité de  
 racines, donc il y a une infinité de solutions  $V$  qui satisfont l'équation  
 à la surface; prenons seulement les racines positives:  $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$

Elles donnent autant de solutions particulières de  $V$ ; ajoutons-les en  
 les multipliant par des coefficients constants:

$$V = A_1 \frac{e^{-km_1^2 t} \sin m_1 z}{z} + A_2 \frac{e^{-km_2^2 t} \sin m_2 z}{z} + \dots$$

Si cette série est convergente, ce sera encore une solution de l'équation  
 à la surface. Nous allons chercher à déterminer les coefficients  $A$   
 de telle sorte que,  $F(z)$  étant la fonction donnée pour l'état initial,  
 on ait le développement, pour  $t=0$ :

$$z F(z) = A_1 \sin m_1 z + A_2 \sin m_2 z + \dots$$

Ce développement est précisément celui que nous venons d'obtenir;



15

C'est une série convergente ordonnée suivant les sinus de  $x$  multiplié par les racines successives de l'équation transcendante:  $\tan x + Hx = 0$ .

Remarquons que cette série ne contient que des sinus. Mais si l'on pose:

$\varphi(x) = xH(x)$  pour  $x$  compris entre 0 et  $R$ , et:

$\varphi(-x) = -\varphi(x)$ , on pourra développer  $\varphi(x)$  en une série qui doit, a priori, contenir des sinus et des cosinus (car on y fait figurer toutes les racines, tant positives que négatives, de l'équation à la surface). Mais puisque  $\varphi$  est une fonction impaire (changeant de signe avec  $x$ ) elle ne peut contenir de cosinus. Donc on pourra appliquer les formules précédemment trouvées à  $\varphi(x)$ , fonction définie dans l'intervalle  $(-R, +R)$ , et on aura le même développement que pour  $xH(x)$  où  $x$  était supposé positif; on connaîtra ainsi les coefficients successifs  $A_1, A_2, \dots$  etc. Pour avoir la série qui donne  $V$  à un instant quelconque, il suffira de diviser tous les termes par  $\varepsilon$ , et de multiplier chacun d'eux par  $e^{-k\pi\varepsilon}$ , ce qui ne peut que les diminuer, et ne trouble pas la convergence de la série. Ainsi la solution générale  $V$  se compose de la série des solutions simples multipliées par des coefficients convergents qui sont ceux du développement trigonométrique que nous venons d'étudier.





# Fonctions analytiques de 2 variables complexes.

Nous avons défini précédemment l'intégrale double:

$$\iint f(x,y) dx dy$$

étendue à une aire fermée quelconque du plan des  $xy$ ;  $f(x,y)$  étant la valeur de la fonction  $f$  dans le rectangle infiniment petit  $dx dy$ , et  $dx, dy$  étant essentiellement positifs. Faisons le changement de variables:  $x = \varphi(u,v)$   $y = \psi(u,v)$

et supposons qu'il y ait correspondance uniforme entre les points de l'aire  $C$  du plan des  $(xy)$  et les points de l'aire  $T$  du plan des  $(uv)$ . Le déterminant fonctionnel:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$$

ne s'annulera pas et gardera par suite un signe invariable dans toute l'étendue des 2 aires correspondantes. On aura alors:

$$dx dy = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} du dv$$

et l'intégrale deviendra:  $\iint f(\varphi, \psi) \varepsilon \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} du dv$

$\varepsilon$  étant le facteur  $\pm 1$ , choisi tel que:  $\varepsilon \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} > 0$ , de manière à rendre l'élément différentiel constamment positif comme dans l'intégrale précédente. — Telles sont les conditions et les règles du changement de variables dans les intégrales multiples; nous nous bornons à les rappeler.

On sait comment s'exprime l'aire d'une surface courbe l'unité par



un contour fermé  $C$ . Soit  $T$  la projection de ce contour sur le plan des  $xy$ ; les projections soit  $\gamma$  l'angle aigu que fait l'élément superficiel de  $C$  avec ~~le plan des  $xy$~~   $xy$ . Supposons que  $\cos \gamma$  ne devienne jamais nul, et par suite conserve le même signe dans toute l'aire  $C$ ; de sorte que chaque élément plan  $dx dy$ , <sup>correspond</sup> <sub>à un seul élé-</sub> ment superficiel de  $C$ ; ce dernier élément aura pour expression:

$\frac{dx dy}{\cos \gamma}$  quantité constamment finie & positive;  
l'aire  $C$  aura pour expression l'intégrale double:

$$\iint \frac{dx dy}{\cos \gamma}$$

parfaitement déterminée, étendue à l'aire plane  $T$ .

Cherchons ce que devient l'élément de surface:  $\frac{dx dy}{\cos \gamma} = ds$   
quand on fait le ~~chang~~ <sup>change</sup> exprime les coordonnées de la surface en fonction de 2 paramètres  $u, v$ : on a alors:

$$dx dy = \epsilon \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \quad (\epsilon \text{ déterminé comme ci-dessus})$$

Pour calculer le  $\cos \gamma$ , nous considérons les 2 familles de courbes,

$$v = \text{const.}$$

$$u = \text{const.}$$

tracées sur la surface  $C$ ; la tangente à l'une des courbes de la  $v$  famille a pour paramètres directeurs:

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u}$$

et la tangente à l'une des courbes de la  $u$ :

$$\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}$$

La normale à l'élément superficiel  $ds$  fait avec l'axe des  $z$  l'angle  $\gamma$ , et les angles  $\alpha, \beta$  avec les axes  $Ox, Oy$ ; écrivons qu'elle est perpendiculaire aux tangentes aux 2 courbes précédentes:

$$\cos \alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \cos \beta \frac{\partial y}{\partial u} + \cos \gamma \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$\cos \alpha \frac{\partial x}{\partial v} + \cos \beta \frac{\partial y}{\partial v} + \cos \gamma \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$



d'où la proportion: 
$$\frac{\cos \alpha}{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}} = \frac{\cos \beta}{\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}} = \frac{\cos \gamma}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}$$

On a donc: 
$$\cos \gamma = \frac{\varepsilon \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{\sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2}}$$

on a multiplié par  $\varepsilon$  (défini plus haut) pour avoir  $\cos \gamma \geq 0$ ;  
en prenant d'ailleurs la valeur arithmétique (positive) du radical.  
Si on l'élément superficiel  $ds$  a pour expression:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2} du dv.$$

Cette formule est générale et sans restrictions, car  $\cos \gamma$  n'est  
disparue, il ne reste qu'une condition, la correspondance uniforme  
entre les points de la surface courbe et ceux du plan des  $(u, v)$   
pour tous les points de laire  $C$ .

Considérons maintenant l'intégrale:  $\iint C dx dy$   
où  $C$  est une fonction de  $x, y, z$  étendue à une certaine aire  
d'une surface courbe. Faisons:  $dx dy = \cos \gamma ds$

l'intégrale devient:  $\iint C \cos \gamma ds$

Mais ici  $\cos \gamma$  peut avoir un signe quelconque, et  $dx dy$  aussi ( $ds$   
étant considéré comme essentiellement positif.) En effet on peut  
distinguer les 2 côtés de la surface, et les normales dirigés d'un côté  
ou de l'autre; sur un côté,  $\cos \gamma$  a un signe constant (en suppo-  
sant qu'il n'y a aucun pas dans laire considérée.) Donc l'intégrale sera



parfaitement déterminé.  $\cos \gamma$  do étant déterminé en tous les éléments de laire. Si l'on prend l'intégrale sur l'autre face, on a la même valeur avec un signe contraire, puisque  $\cos \gamma$  aura partout changé de signe. Si l'on choisit de prendre les intégrales sur un côté de la surface, on a sans ambiguïté de signe:

$$\iint C dx dy = \iint C \cos \gamma do \quad \text{et de même:}$$

$$\iint A dy dz = \iint A \cos \alpha do \quad \iint B dz dx = \iint B \cos \beta do$$

et, en faisant la somme, qui se rencontre fréquemment:

$$\iint (A dy dz + B dz dx + C dx dy) = \iint [A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma] do.$$

Cette intégrale prend une forme intéressante quand  $x, y, z$  sont fonctions de 2 paramètres  $u, v$ ; on a alors:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}}$$

les 3 cosinus devant contenir le même facteur  $\pm$  c'est à dire simultanément le signe + ou le signe -. Prenons par exemple le signe +; si l'on prenait le signe -, l'intégrale ne ferait que changer de signe. On y substituera les valeurs des 3 cosinus et de  $do$ , et on aura:

$$\iint \left[ A \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + B \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + C \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] du dv$$

intégrale double étendue à toute laire  $I$  qui dans le plan des  $(u,v)$  correspond à laire  $G$ . Cette formule est très-générale, de la manière dont nous venons de l'établir, car il suffit qu'il y ait correspondance une forme entre chaque point  $(u,v)$  du plan et chaque point  $(x,y,z)$



de la portion de surface considérée; ce qui peut avoir lieu sans qu'il ait correspondance uniforme entre cette surface & chacun de ses 3 projections sur les plans coordonnés, c'est à savoir qu'on ait séparément:

$$dx dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \quad dy dz = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv \quad dz dx = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv.$$

On connaît à quelles conditions l'intégrale curviligne:

$$\int (P dx + Q dy)$$

prise sur une courbe <sup>plane</sup> entre 2 points fixes est indépendante du chemin suivi de l'un à l'autre de ces points. La même question se pose pour l'intégrale de surface:

$$\iint A dy dz + B dz dx + C dx dy$$

prise sur une surface limitée par un contour fermé fixe C. On peut en effet faire passer une infinité de surfaces par cette courbe C; on peut faire correspondre le côté de l'une à un côté de l'autre, de manière à pouvoir les amener à coïncider par des déformations continues, et prendre l'intégrale double sur le côté correspondant de chacune d'elles. Cherchons les conditions pour lesquelles cette intégrale sera la même sur toutes les surfaces passant par le contour C, au moins sur celles comprises dans une certaine région de l'espace.

Pour cela, nous allons démontrer une transformation analogue à celle d'une intégrale double en intégrale curviligne, et prouver qu'on peut remplacer l'intégrale triple:

$$\iiint \left[ \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right] dx dy dz$$

étendue à un volume limité par une surface fermée S, par une intégrale double ~~de surface~~ étendue à la surface S.



Si l'on fait  $y$  et  $z$  constants, on peut écrire :

$$\iiint \frac{\partial A}{\partial x} dx dy dz = \iint dy dz \int \frac{\partial A}{\partial x} dx$$

Or, pour un système de valeurs de  $y, z$ , on a 2 points  $x$  correspondants sur la surface fermée  $S$  (en la supposant convexe); soient  $x_1, x_2$ ;  
alors:  $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial A}{\partial x} dx = A_2 - A_1$  et il reste:  $\iint dy dz (A_2 - A_1)$

D'autre part, considérons l'intégrale:  $\iint A dy dz$   
étendue à la surface  $S$  sur le côté extérieur; elle sera identique à :

$$\iint A \cos \alpha d\sigma$$

Or pour tous les points  $x_2$ ,  $\cos \alpha > 0$ ,  
donc l'intégrale prise en ces points sera:

$$\iint A_2 dy dz$$

Pour tous les points  $x_1$ ,  $\cos \alpha < 0$ ,  
l'intégrale prise en ces points sera:

$$\iint -A_1 \cos \alpha d\sigma = - \iint A_1 dy dz$$

en convenant à  $dy dz$  la signification positive. Or la surface  $S$  est la somme des points  $x_1$  et  $x_2$  correspondant aux points  $(y, z)$  contenus dans la projection  $\Gamma$  sur le plan des  $(y, z)$ ; donc:

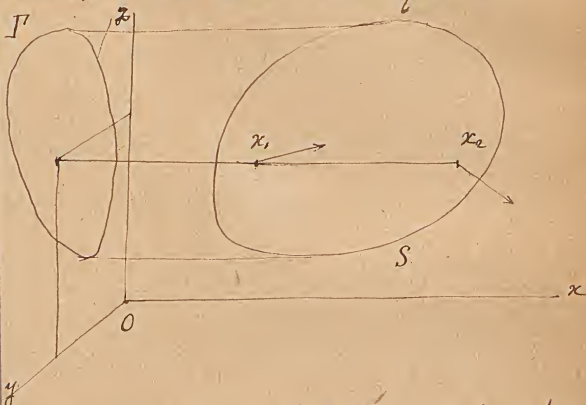
$$\iint_S A dy dz = \iint_{\Gamma} dy dz (A_2 - A_1) \quad \text{et par suite:}$$

$$\iiint \frac{\partial A}{\partial x} dx dy dz = \iint_S A dy dz$$

et, en ajoutant 2 égalités semblables:

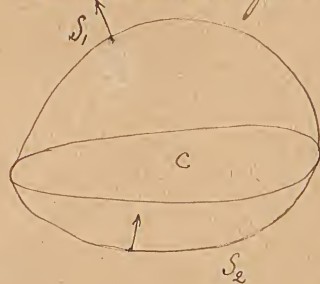
$$\iiint \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S [A dy dz + B dz dx + C dx dy]$$

intégrale étendue à la face extérieure de la surface  $S$ .





Revenons à la question posée tout à l'heure et considérons 2 surfaces  $S_1, S_2$  passant par le même contour fermé  $C$ ; elles délimitent un certain volume  $V$ . Pour prendre l'intégrale double sur les faces correspondantes de  $S_1$  et de  $S_2$ , on devra la prendre sur la face extérieure de  $S_1$ , par exemple, et sur la face intérieure de  $S_2$ , ce qui revient à changer le signe de cette dernière.



Pour que les 2 intégrales  $\int_{S_1, S_2}$  soient égales, il faut que l'intégrale totale prise sur la surface  $(S_1 + S_2)$  du côté extérieur soit nulle. Or cette intégrale :  $\iint [A dy dz + B dz dx + C dx dy]$  est égale, au vu de voir, à une intégrale triple prise étendue au volume  $V$ ; on doit donc avoir :

$$\iiint \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz = 0$$

et pour que cette intégrale soit nulle quelle que soit la surface fermée passant par  $C$ , il faut que :

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

Cette condition nécessaire est également suffisante.

Remarquons que dans le cas de 2 variables, la condition d'intégrabilité :

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

offre un changement de signes, tandis qu'il n'y en a pas dans le cas de 3 variables; mais l'alternance des signes réparaît dans le cas de 4 variables.

L'intégrale de surface que nous venons de considérer ne sera pas nécessairement nulle, quand la surface enfermera des points où les fonctions  $A, B, C$  cessent d'être continues et déterminées. Dans ce cas, on peut



déformer la surface d'une manière continue sans la faire passer par un point singulier: l'intégrale ne changera pas de valeur. En général, toutes les propriétés que nous avons démontrées pour les courbes dans le plan subsistent pour les surfaces dans l'espace, puisque le théorème fondamental relatif à l'intégrale curviligne est stable pour celles-ci.

Signalons 2 cas particuliers intéressants de la formule précédente.

Supposons d'abord:  $A = x$ ,  $B = y$ ,  $C = z$ . on a:

$$3 \iiint dx dy dz = \iint (x dy dz + y dz dx + z dx dy) \quad \text{ou}$$

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x dy dz + y dz dx + z dx dy)$$

Ainsi le volume contenu dans une surface fermée peut s'exprimer par un intégral double prise sur le côté extérieur de cette surface.

Supposons ensuite:  $A = \frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $B = \frac{\partial V}{\partial y}$ ,  $C = \frac{\partial V}{\partial z}$ .

$V$  étant une fonction de  $x, y, z$ . La formule devient:

$$\iiint \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) dx dy dz = \iint \left( \frac{\partial V}{\partial x} dy dz + \frac{\partial V}{\partial y} dz dx + \frac{\partial V}{\partial z} dx dy \right)$$

$$\text{ou} \quad \iiint \Delta V dx dy dz = \iint \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \cos \gamma \right] d\sigma.$$

Où  $\alpha, \beta, \gamma$  étant les angles que fait avec les axes la normale extérieure à la surface fermée, on a:  $\frac{\partial V}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \cos \gamma = \frac{dV}{dn}$  dérivée de la fonction  $V$  suivant la direction de la normale extérieure;

$$\text{donc:} \quad \iiint \Delta V dx dy dz = \iint \frac{dV}{dn} d\sigma.$$

Si la fonction  $V$  satisfait à l'équation de Laplace  $\Delta V = 0$ ,

$$\text{on aura identiquement:} \quad \iint \frac{dV}{dn} d\sigma = 0.$$



Application. On a vu, dans le problème du refroidissement d'un corps, que la température d'un point :  $V(x, y, z, t)$  satisfait l'équation différentielle :  $\Delta V = H \frac{\partial V}{\partial t}$ .

Voici comment on déduit analytiquement cette relation de la loi physique. Fourier a tiré de la loi de Newton cette conséquence, que la quantité de chaleur qui passe dans un laps de temps  $dt$  à travers un élément de surface  $do$  est proportionnelle à la dérivée :  $\frac{\partial V}{\partial n}$  de la température suivant la normale intérieure. Comme ce passage a lieu en sens inverse de cette normale (suivant laquelle la température croît) cette quantité de chaleur a pour expression :  $-k \frac{\partial V}{\partial n} dt do$ .

Nous allons évaluer de 2 manières différentes la quantité de chaleur <sup>entrant</sup> qui traverse la surface fermée  $S$ ; d'après ce qui vient d'être dit, elle aura pour expression :  $\iint_S k \frac{\partial V}{\partial n} do dt = K dt \iint_S \frac{\partial V}{\partial n} do$ .

D'autre part, considérons un point quelconque  $(x, y, z)$  de l'intérieur; dans le laps  $dt$ , sa température s'est élevée de :  $\frac{\partial V}{\partial t} dt$ .

Soit  $C$  la chaleur spécifique du corps,  $D$  son poids spécifique (le corps étant supposé homogène) la quantité de chaleur acquise par le corps sera :  $\iiint C \frac{\partial V}{\partial t} dt \cdot D dx dy dz = CD dt \iiint \frac{\partial V}{\partial t} dx dy dz$

Égalons ces 2 expressions de la quantité de chaleur gagnée par le corps :  $k \iint \frac{\partial V}{\partial n} do = CD \iiint \frac{\partial V}{\partial t} dx dy dz$  ou, en posant :  $\frac{CD}{k} = H$ ,

$$\iiint \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - H \frac{\partial V}{\partial t} \right] dx dy dz = 0.$$

Cette égalité devant avoir lieu identiquement, il faut que l'élément différentiel





Soit constamment nul, ce'di qu'on ait:

$$\Delta V = H \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{c.g.f.d}$$

Considérons la fonction:

$$V = \frac{1}{z}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Il est aisé de voir qu'elle vérifie l'équation:

$$\Delta V = 0.$$

On a donc:

$$\iint \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0$$

sur toute surface fermée n'entourant pas l'origine, où  $V = \infty$ .

Ramenons cette intégrale à sa forme primitive explicite:

$$\iint \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \cos \gamma \right] ds = \iint \frac{\partial V}{\partial x} dy dz + \frac{\partial V}{\partial y} dz dx + \frac{\partial V}{\partial z} dx dy$$

Or:  $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x}{z^3} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{y}{z^3} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{z}{z^3}$

L'intégrale devient: 
$$\iint \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

et elle satisfait à la condition d'intégrabilité:  $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$ ,  
car celle-ci revient à:  $\Delta V = 0$ .

Cherchons maintenant quelle valeur prend l'intégrale précédente prise sur une surface qui entoure l'origine. On sait qu'on peut déformer cette surface de n'importe quelle manière, pourvu qu'elle ne franchisse jamais le point 0; la valeur de l'intégrale ne changera pas. Nous allons prendre en particulier la sphère de centre 0 et de rayon 1, et évaluer l'intégrale prise sur sa face extérieure. Dans ce cas:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .  
Or, on a vu d'une formule précédente:

$$\iint (xdydz + ydzdx + zdx dy) = 3V = 4\pi$$

car:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

Ainsi, en général, la valeur de l'intégrale double:

$$\iint \frac{XdYdZ + YdZdX + ZdXdY}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

prise sur une surface quelconque entourant l'origine, est:  $4\pi$ .



Transformons maintenant cette intégrale en faisant le changement de variables:  $X = f(x, y, z)$   $Y = \varphi(x, y, z)$   $Z = \psi(x, y, z)$

On suppose que ces 3 fonctions s'annulent pour le système  $(x_0, y_0, z_0)$  de sorte qu'au point:  $X=0, Y=0, Z=0$  correspond le point:

$x=x_0, y=y_0, z=z_0$ . On suppose en outre que le système  $(x_0, y_0, z_0)$  soit une solution simple du système:  $f=0, \varphi=0, \psi=0$ ,

cà d qu'au point  $(x_0, y_0, z_0)$  on a:  $\frac{\delta(f, \varphi, \psi)}{\delta(x, y, z)} \neq 0$ .

Enfin on suppose qu'il y ait correspondance uniforme entre les points  $(X, Y, Z)$  et  $(x, y, z)$  au voisinage des 2 p.  $(0)$  et  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Considérons une surface  $S$  entourant le p.  $0$ ; il lui correspondra une surface  $S$  entourant le point  $(x_0, y_0, z_0)$ ; à l'intégrale prise sur  $S$  dans l'espace  $(XYZ)$  correspondra une intégrale prise sur  $S$  dans l'espace  $(xyz)$ . Supposons que les 2 surfaces puissent s'exprimer en fonction de 2 paramètres  $u, v$ ; l'intégrale précédente deviendra:

$$\iint \frac{X \frac{\partial(YZ)}{\partial(uv)} + Y \frac{\partial(ZX)}{\partial(uv)} + Z \frac{\partial(XY)}{\partial(uv)}}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} du dv$$

Évaluons les déterminants fonctionnels qui figurent au numérateur en fonction de  $x, y, z$  et de leurs dérivées par rapport à  $u, v$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(YZ)}{\partial(uv)} &= \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial Z}{\partial u} = \\ &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \kappa}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \gamma}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \kappa}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \gamma}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right) \\ &\quad - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \kappa}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \gamma}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \kappa}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \gamma}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial(\varphi \psi)}{\partial(xy)} \frac{\partial(x\gamma)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(\varphi \psi)}{\partial(yz)} \frac{\partial(y\zeta)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(\varphi \psi)}{\partial(zx)} \frac{\partial(z\kappa)}{\partial(uv)} \end{aligned}$$



De même: 
$$\frac{\partial(ZX)}{\partial(uv)} = \frac{\partial(\psi f)}{\partial(xy)} \frac{\partial(xy)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(\psi f)}{\partial(yz)} \frac{\partial(yz)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(\psi f)}{\partial(zx)} \frac{\partial(zx)}{\partial(uv)}$$

$$\frac{\partial(XY)}{\partial(uv)} = \frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)} \frac{\partial(xy)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(f\varphi)}{\partial(yz)} \frac{\partial(yz)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(f\varphi)}{\partial(zx)} \frac{\partial(zx)}{\partial(uv)}$$

Si nous substituons ces expressions dans l'intégrale, on aura une forme linéaire en  $\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)}$ ,  $\frac{\partial(yz)}{\partial(uv)}$ ,  $\frac{\partial(zx)}{\partial(uv)}$ ; le coefficient de  $\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)}$

sera: 
$$X \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(xy)} + Y \frac{\partial(\psi f)}{\partial(xy)} + Z \frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)} = \begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \psi & \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = C$$

Le coefficient de  $\frac{\partial(yz)}{\partial(uv)}$  sera:

$$\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \psi & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} = A$$

celui de  $\frac{\partial(zx)}{\partial(uv)}$ :

$$\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \psi & \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{vmatrix} = B.$$

L'intégrale double deviendra donc:

$$\iint \frac{A dy dz + B dz dx + C dx dy}{(f^2 + \varphi^2 + \psi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Celle est l'intégrale transformée en  $(xyz)$ . Elle remplit la condition d'intégrabilité; car elle a été tirée par un simple changement de variables d'une intégrale qui remplirait cette condition. Si la surface fermée  $S$  suivant laquelle on la prend ne contient aucun point où  $f, \varphi, \psi$  s'annulent à la fois, l'intégrale sera nulle comme celle dont on l'a tirée. Il est donc à présumer que la valeur qu'elle prend sur une surface quelconque dépend du nombre des racines du système 
$$\begin{cases} f=0 \\ \varphi=0 \\ \psi=0 \end{cases}$$



contenus à l'intérieur de cette surface. Nous allons calculer cette valeur. On suppose que les racines contenues à l'intérieur de la surface  $S$  sont simples, c'est-à-dire que le déterminant fonctionnel des 3 équations ne s'annule pas pour ces racines. Soient ces racines représentées par les points  $A, A_1, A_2, \dots$  à l'intérieur de  $S$ . L'intégrale prise suivant  $S$  est égale à la somme des intégrales qu'on prendrait sur des surfaces fermées quelconques entourant chacune 1 racine; car on peut par des déformations permises réduire la surface  $S$  à ces surfaces isolées, en nombre égal aux racines. Nous n'avons donc qu'à considérer une de celles-ci, et à évaluer l'intégrale de surface prise sur elle. Pour simplifier, nous prendrons le point-racine pour origine, par un transport d'axes. Supposons que les 3 fonctions  $f, \varphi, \psi$  soient développables par la formule de Taylor au voisinage de cette racine (du point  $O$ ):

$f = ax + by + cz + \dots$      $\varphi = a_1x + b_1y + c_1z + \dots$      $\psi = a_2x + b_2y + c_2z + \dots$   
 et que le déterminant fonctionnel ne soit pas nul (hypothèse générale):

$$D = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nous ne changerons pas la valeur de l'intégrale si nous réduisons les 3 fonctions à leurs termes du 1<sup>er</sup> degré; en effet, on peut la prendre sur une sphère de centre  $O$  et de rayon  $\rho$  aussi petit qu'on veut; la partie principale, composée des termes du 1<sup>er</sup> degré, sera indépendante de  $\rho$ , car elle sera infiniment petite avec  $\rho$ ; les autres termes seront infiniment petits par rapport à  $\rho$ , et par conséquent ils sont nuls, car on sait que l'intégrale est indépendante de  $\rho$ . Nous avons en somme à évaluer:

$$\frac{1}{4\pi} \iint \frac{A dy dz + B dz dx + C dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



L'expression se réduit à :

$$\left[ (ax+by+cz)^2 + (a_1x+b_1y+c_1z)^2 + (a_2x+b_2y+c_2z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

Le numérateur:  $A = \begin{vmatrix} ax+by+cz & b & c \\ a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & b & c \\ a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$$A = Dx$$

$$B = Dy$$

$$C = Dz.$$

Le numérateur se réduit à :  $D(xdydz + ydzdx + zdxdy)$ .

Intégrons sur la face extérieure de l'ellipsoïde ayant pour équation :

$$\left[ (ax+by+cz)^2 + (a_1x+b_1y+c_1z)^2 + (a_2x+b_2y+c_2z)^2 \right]^{\frac{3}{2}} = 1.$$

L'intégrale devient :  $\frac{D}{4\pi} \iint (xdydz + ydzdx + zdxdy) = \frac{D}{4\pi} \cdot 3V$

Où on a pour le volume de l'ellipsoïde :

$$V = \frac{4}{3}\pi \frac{1}{|D|}$$

Donc :

$$\frac{1}{4\pi} \iint \frac{A dy dz + B dz dx + C dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{D}{|D|} = \pm 1.$$

Ainsi l'intégrale est égale à  $+1$ , si pour la racine considérée  $D > 0$ , et à  $-1$ , si pour la racine considérée  $D < 0$ . Le même raisonnement s'appliquant à toutes les autres racines, on peut énoncer cette proposition générale, due à M. Kronecker :

Théorème de Kronecker : Si l'on prend l'intégrale considérée sur une surface fermée qui entoure plusieurs racines du système :  $\begin{cases} f=0 \\ \varphi=0 \\ \psi=0 \end{cases}$  la valeur de l'intégrale sera l'excès du nombre des racines pour lesquelles le déterminant fonctionnel des 3 équations est positif, sur le nombre de celles pour lesquelles il est négatif.



Cette conclusion a été étendue par M. Kronecker au cas de n équations à n inconnues. C'est la généralisation du théorème établi au début du cours (1<sup>er</sup> cahier, page 17) pour 2 fonctions  $f, \varphi$  de 2 variables  $x, y$ .

On sait que dans le cas de 2 équations, l'intégrale curviligne ne donne pas en général le nombre des racines <sup>communes</sup> contenues dans un contour fermé, si ce n'est quand  $(f+i\varphi)$  est une fonction analytique de  $(x+iy)$ ; mais on a obtenu un moyen d'évaluer par une intégrale le nombre des racines d'une équation comprises dans un intervalle linéaire. De même, le théorème précédent va nous fournir un moyen de déterminer en général le nombre des racines communes à 2 équations contenues dans un contour donné  $C$  (dans le plan des  $xy$ ).

Soient ces 2 équations:  $f(x, y) = 0$        $\varphi(x, y) = 0$ .  
Ajoutons leur 3<sup>e</sup> équation:  $z \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, y)} = 0$ .

On a ainsi un système de 3 équations à 3 inconnues  $x, y, z$ ; cherchons-en les solutions. Toute racine commune aux 3 équations sera commune aux 2 premières; pour les valeurs correspondantes de  $x, y$ , la 3<sup>e</sup> donnera:  $z = 0$ , puisque par hypothèse les racines sont simples, c'est à d:  $\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, y)} \neq 0$ .

Ainsi toutes les racines du système sont dans le plan des  $xy$ , et sont les racines communes aux 2 équations proposées. Prenons le contour  $C$  pour directrice d'une surface cylindrique parallèle à l'axe des  $z$ , et coupons-la par les plans:  $z = -\varepsilon$ ,  $z = +\varepsilon$ . On délimite ainsi un cylindre: si l'on peut trouver le nombre des racines du système contenues dans ce volume, on aura le nombre des racines communes aux 2 équations proposées, qui sont contenues dans le contour  $C$ .



Or le déterminant fonctionnel des 3 équations a un signe constant :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & 0 \\ M & N & \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 > 0.$$

car on a supposé:  $\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, y)} \neq 0.$

Donc la règle de Kronecker donne précisément le nombre des racines cherchées, au moyen d'une intégrale double prise sur la surface du cylindre délimitée comme il a été dit.

Nous allons calculer cette intégrale double prise sur la face extérieure du cylindre, et pour cela nous la dédoublons en 2 intégrales, l'une prise sur la surface cylindrique, l'autre prise sur les 2 bases.

Nous avons pris pour la 3<sup>e</sup> fonction  $\varphi$ :  $z \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, y)} = z D.$

Sur la surface latérale, l'intégrale ne contiendra pas de terme en  $dz dy$ , puisque la projection de cette aire sur le plan des  $xy$  est nulle.

On a simplement:  $\frac{1}{4\pi} \iint A dy dx + B dx dz = \frac{1}{4\pi} \iint (A \cos \alpha + B \cos \beta) ds$

$\alpha, \beta$  étant les angles que fait la normale extérieure à la surface, c'est-à-dire au contour  $C$ , avec les axes  $Ox, Oy$ . Pour l'élément de surface on a:  $ds = ds \cdot dz$  produit de 2 quantités positives.

D'où:  $\frac{1}{4\pi} \iint (A \cos \alpha ds + B \cos \beta ds) dz = \frac{1}{4\pi} \iint (A dy - B dx) dz$

Intégrons d'abord le long d'une génératrice, en faisant varier  $z$  seul; et posons:  $P = - \int_{-z}^{+z} B dx$   $Q = \int_{-z}^{+z} A dz$

On aura ensuite à intégrer suivant le contour  $C$ , ce qui donne l'intégrale curviligne:

$$\frac{1}{4\pi} \int_C P dx + Q dy$$



Nous allons calculer  $P, Q$ , en partant des expressions de  $A, B$ :

$$A = \frac{\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & 0 \\ zD & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & D \end{vmatrix}}{(f^2 + \varphi^2 + z^2 D^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{D(f \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi \frac{\partial f}{\partial y})}{(f^2 + \varphi^2 + z^2 D^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} f & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \varphi & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ zD & D & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}}{(f^2 + \varphi^2 + z^2 D^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-D(f \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial f}{\partial x})}{(f^2 + \varphi^2 + z^2 D^2)^{\frac{3}{2}}}$$

D'où :

$$P = \int_{-z}^{+z} \frac{D(f \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial f}{\partial x})}{(f^2 + \varphi^2 + D^2 z^2)^{\frac{3}{2}}} dz$$

$$Q = \int_{-z}^{+z} \frac{D(f \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi \frac{\partial f}{\partial y})}{(f^2 + \varphi^2 + D^2 z^2)^{\frac{3}{2}}} dz$$

$$P = (f \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial f}{\partial x}) \int_{-z}^{+z} \frac{D dz}{(f^2 + \varphi^2 + D^2 z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{f \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial f}{\partial x}}{f^2 + \varphi^2} \cdot \frac{2D\varepsilon}{(f^2 + \varphi^2 + D^2 \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$Q = \frac{f \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi \frac{\partial f}{\partial y}}{f^2 + \varphi^2} \cdot \frac{2D\varepsilon}{(f^2 + \varphi^2 + D^2 \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \left[ \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{A} \cdot \frac{x}{(x^2 + A)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

et, si l'on supprime le facteur 2 dans ces expressions, l'intégrale prise sur la surface convexe se réduit à :

$$\frac{1}{2\pi} \int P dx + Q dy$$

Prenons maintenant l'intégrale sur le 2<sup>e</sup> bas du cylindre. Elle ne contient plus que le terme en  $dx dy$ , les projections des arcs du 2<sup>e</sup> bas, sur les plans des  $xz$  et des  $yz$ , étant nulles :

$$\frac{1}{4\pi} \iint C dx dy$$

intégrale étendue à la base supérieure et à la base inférieure du cylindre.



On a d'ailleurs,

$$C = \frac{\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ D & \frac{\partial D}{\partial x} & \frac{\partial D}{\partial y} \end{vmatrix}}{(f^2 + \varphi^2 + D^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dx dy = \cos \gamma do$$

Or pour la base supérieure, on a:  $z = +\varepsilon$ , et  $dx dy > 0$   
car la normale extérieure fait un angle nul avec  $Oz$ ; pour la base  
inférieure, on a au contraire:  $z = -\varepsilon$ , et  $dx dy < 0$   
puisque la normale extérieure fait avec  $Oz$  l'angle  $\pi$ .

Les intégrales prises sur les 2 bases s'ajoutent donc, et leur somme est:

$$\frac{1}{2\pi} \iint C dx dy \quad \text{où: } \begin{matrix} dx dy > 0 \\ z = +\varepsilon \end{matrix}$$

intégrale étendue à la base supérieure seulement. C'est une intégrale  
double ordinaire en  $x, y$  prise à l'intérieur du contour donné  $C$ .  
Ainsi le nombre des racines du système:  $f(x, y) = 0 \quad \varphi(x, y) = 0$   
contenues dans ce contour est exprimé par les 2 intégrales:

$$\frac{1}{2\pi} \int_c P dx + Q dy + \frac{1}{2\pi} \iint C dx dy$$

$\varepsilon$  est arbitraire; ~~donc~~<sup>or</sup> quel que soit  $\varepsilon$ , la somme doit être la même;  
donc elle est indépendante de  $\varepsilon$ . On pourra calculer les 2 intégrales pour  
une valeur quelconque de  $\varepsilon$  sauf 0 et  $\infty$ . On n'aura qu'à  
pousser l'approximation à moins de  $\frac{1}{2}$  près pour avoir le résultat exact,  
qui est nécessairement un nombre entier.

Pour  $\varepsilon$  infiniment petit, l'intégrale curviligne tend vers 0, car  $P$   
 $+ Q$  tendent tous deux vers 0. L'intégrale double doit donc tendre  
vers le nombre des racines. Or  $C$  tend vers 0 avec  $\varepsilon$ , tant qu'on n'est  
pas en un des points racines du système:  $f = 0, \quad \varphi = 0,$



car alors le dénominateur de  $C$  s'annule, et comme il est de l'ordre  $3^e$  par rapport au numérateur (en  $\varepsilon$ )  $C$  devient infini. Ce sont les éléments infinis correspondant aux racines qui causent l'indétermination ~~de la~~ apparente de l'intégrale, pour  $\varepsilon = 0$ . On ne peut d'ailleurs vaincre cette indétermination, car il faudrait pour cela connaître les racines dont on cherche le nombre.

Pour  $\varepsilon$  infiniment grand, l'intégrale curviline reste déterminée; l'intégrale double tend encore vers une limite, mais les éléments ne sont déterminés que sur la courbe.

$$D = 0.$$

On voit ainsi reparaitre la difficulté primitive née du signe du déterminant fonctionnel. Donc pour  $\varepsilon = \infty$  non plus que pour  $\varepsilon = 0$ , on ne peut évaluer le nombre des racines par les intégrales précédentes.

Dans certains cas particuliers, quand on se borne à considérer des polynômes et des contours limités par des arcs de courbes unicursales, l'application de cette méthode est simple et donne un résultat pratique.



Nous allons définir et étudier les fonctions analytiques de 2 variables complexes. Soient les quantités complexes :

$$u = x + iy$$

$$v = z + it$$

on appellera fonction analytique de u et de v une fonction de la forme :  $f(u, v) = P(x, y, z, t) + iQ(x, y, z, t)$

la fonction complexe  $(P + iQ)$  étant fonction analytique à la fois de u et de v. Cette condition s'exprime par les 4 équations :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial z}$$

On peut se poser cette question : A combien de conditions satisfait séparément la fonction  $P$  ? C'est à dire, combien de conditions faut-il imposer à une fonction  $P$  de 4 variables réelles pour qu'on puisse en déduire, par les 4 relations précédentes (à une constante près) la fonction  $Q$  correspondante ? Car, connaissant les 4 dérivées partielles de  $P$ , on connaîtra celles de  $Q$ , et on pourra déterminer cette fonction.

Or, si l'on égale les dérivées secondes de  $Q$  qui sont identiques, mais prises dans un ordre différent, on obtiendra 6 combinaisons différentes des 4 équations précédentes prises 2 à 2 ; mais on n'a que 4 relations distinctes, que voici :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0 \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial t} = 0 \quad \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0.$$

Si l'on a une fonction  $P$  satisfaisant ces 4 équations différentielles du 2<sup>e</sup> ordre, on peut trouver une fonction  $Q$  qui forme, associée à  $P$ , une fonction analytique des 2 variables complexes u, v formées elles-mêmes des 4 variables réelles dont dépendent  $P$  et  $Q$ .

Ainsi, tandis que pour une fonction analytique d'une variable



complexe  $P$  et  $Q$  ne doivent satisfaire qu'une équation différentielle, l'équation de Laplace, pour une fonction de 2 variables complexes,  $P$  et  $Q$  doivent satisfaire 4 équations simultanées du 2<sup>e</sup> ordre.

On peut donc prévoir qu'il n'y aura presque aucun rapport entre les fonctions analytiques de 2 variables et celles d'une variable, que nous avons étudiées. La théorie des premières n'est donc pas (au moins quand on les considère comme fonctions de variables réelles) une simple généralisation de la théorie des secondes. Au contraire, la théorie des fonctions harmoniques (= finies, continues et satisfaisant à l'équation de Laplace dans un champ limité), que nous avons exposée pour le cas de 2 variables, s'étend sans difficulté, et presque sans changement, au cas de 3, 4...  $n$  variables (dans un champ à  $n$  dimensions) ce qui prouve que telle en est bien la vraie généralisation.

Une fonction analytique de 2 variables complexes :  $f(x, y)$  peut se développer en série de Taylor ou de Maclaurin au voisinage d'un point  $(x, y)$ . Considérons en effet séparément les plans des  $x$  et le plan des  $y$  : supposons que la fonction  $f$  soit holomorphe dans 2 cercles décrits chacun dans un de ces plans. Considérons alors la fonction :  $f(xt, yt)$  de la variable complexe  $t$ ;  $x$  et  $y$  étant pris à l'intérieur de leurs cercles respectifs (et non sur la circonférence.) Cette fonction sera développable en une série convergente à l'intérieur du cercle de rayon 1 dans le plan des  $t$ , et même pour  $|t|=1$ , car elle est continue même au-delà de la circonférence de ray. 1. On aura donc par la formule de Maclaurin :

$$f(x, y) = \sum \frac{1}{n!} \left[ x \frac{\partial f}{\partial h} + y \frac{\partial f}{\partial k} \right]_{h=0, k=0}^{(n)}$$



Dans ce développement, le terme général d'ordre  $n$  sera un polynôme homogène en  $x, y$ ; le coefficient de  $x^\mu y^\nu$  dans ce polynôme sera:

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{\mu! \nu!} \frac{\partial^n f}{\partial x^\mu \partial y^\nu} = \frac{1}{\mu! \nu!} \frac{\partial^n f}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \quad \mu + \nu = n$$

la dérivée étant prise pour  $x=0, y=0$ .

Cherchons une limite supérieure de cette dérivée:  $\frac{\partial^n f}{\partial x^\mu \partial y^\nu}$

Considérons d'abord une fonction d'une seule variable:

$f(z)$  holomorphe dans un cercle de rayon  $r$ ; soit  $C$  la circonférence; on a par la formule de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

pour un point fixe  $(z)$  de ce cercle.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

En coordonnées polaires:  $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-n i \theta} d\theta$

Soit  $M$  le module maximum de la fonction  $f(z)$  dans le cercle:

$$|f^{(n)}(0)| < \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} M d\theta = \frac{n!}{r^n} M \quad \text{pour } n \text{ quelconque.}$$

Revenons à la fonction de 2 variables complexes:  $f(x, y)$

et prenons sa dérivée d'ordre  $\mu$  par rapport à  $x$  pour  $x=0$ ;

soient  $r, R$  les rayons respectifs des cercles où sont compris les points  $x$  et  $y$  chacun dans leur plan. On aura par la formule précédente,  $x$  étant fixe:

$$f_x^\mu(0, y) = \frac{\mu!}{2\pi r^\mu} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}, y) e^{-\mu i \theta} d\theta$$

Prenons maintenant la dérivée d'ordre  $\nu$  de cette fonction dérivée par rapport à  $y$  pour  $y=0$ ; il suffit de dériver sous le signe somme:



$$\left[ \frac{\partial^n f}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \right]_{x=0, y=0} = \frac{\mu! \nu!}{4\pi^2 z^\mu R^\nu} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}, Re^{i\theta'}) e^{-\mu i\theta} e^{-\nu i\theta'} d\theta d\theta'$$

$\theta$  et  $\theta'$  étant les angles d'intégration sur les cercles de rayon  $z$  et  $R$  dans les plans de  $x$  et de  $y$ . Soit  $M$  le module maximum de  $f(x, y)$  dans ce champ; on aura pour limite supérieure de la dérivée:

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \right|_{x=0, y=0} < \frac{\mu! \nu!}{4\pi^2 z^\mu R^\nu} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta d\theta' = \frac{\mu! \nu!}{z^\mu R^\nu} M$$

Nous avons trouvé pour le développement de  $f(x, y)$  une série de la forme:  $\sum P_n(x, y)$   $P_n$  étant un polynôme de degré  $n$  en  $x, y$ .

Or, non-seulement cette série est convergente, mais elle est absolument convergente au sens le plus complet (cf. 1<sup>er</sup> cahier, page 37) c'a.d. qu'elle est encore convergente si dans chaque polynôme  $P_n$  on remplace tous les termes par leur valeur absolue (c'est la définition d'une fonction analytique de 2 variables réelles).

Pour le démontrer, nous avons, d'après ce qui précède, une limite supérieure du coefficient de  $x^\mu y^\nu$  dans  $P_n$  ( $\mu + \nu = n$ ):

$$\left| \frac{1}{\mu! \nu!} \frac{\partial^n f}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \right| < \frac{M}{z^\mu R^\nu}$$

Donc le terme en  $x^\mu y^\nu$  lui-même est inférieur en valeur absolue à:

$$M \left( \frac{x}{z} \right)^\mu \left( \frac{y}{R} \right)^\nu$$

Cette est la limite supérieure du terme général du polynôme  $P_n$ . Remplaçons-y chaque terme par son module: Soient:  $\left| \frac{x}{z} \right| = \alpha, \quad \left| \frac{y}{R} \right| = \beta \quad (\alpha < 1, \quad \beta < 1)$

$$P_n \text{ deviendra: } M \left[ \alpha^n + \alpha^{n-1} \beta + \alpha^{n-2} \beta^2 + \dots + \alpha^2 \beta^{n-2} + \alpha \beta^{n-1} + \beta^n \right]$$



Remplaçons encore  $\alpha$  et  $\beta$  par leur plus grande valeur 0;  $P_n$  sera remplacé par :  $M(n+1) \theta^n$  Or la série :

$\sum M(n+1) \theta^n$  est convergente pour  $\theta < 1$ , ce qui a lieu —  
 A plus forte raison la série  $\sum P_n$  est-elle absolument convergente au sens spécifié plus haut.

On le verrait d'ailleurs en remarquant l'identité suivante :

$$\frac{M}{(1-\alpha)(1-\beta)} = M(1+\alpha+\alpha^2+\dots)(1+\beta+\beta^2+\dots) \geq \sum P_n$$

Ainsi la série obtenue en remplaçant dans chaque polynôme chaque terme par son module supérieur est convergente; chaque terme a d'ailleurs pour limite supérieure :

$$M \left( \frac{x}{r} \right)^u \left( \frac{y}{R} \right)^v$$

Problème: Décomposition en facteurs d'une fonction de 2 variables complexes. (M. Weierstrass.)

On sait qu'une fonction  $f(x)$  qui a pour racine 0 (d'ordre  $n$ ) et qui est holomorphe au voisinage de  $x=0$  peut se mettre sous forme d'un produit de 2 facteurs :  $f(x) = x^n F(x)$  dont le second,  $F(x)$  est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas pour  $x=0$ ; on met ainsi en évidence le facteur  $x^n$  qui seul s'annule, et qui absorbe pour ainsi dire toute la discontinuité de  $f(x)$  pour  $x=0$ .

On peut toujours supposer  $f(x, y)$  telle que :  $f(0, 0) = 0$  en transformant une de ses racines en origine par un changement de coordonnées. Cherchons à la décomposer d'une manière analogue en 2 facteurs, l'un s'annulant pour :  $x=0, y=0$ , l'autre ne s'annulant pas. On va montrer que le 1<sup>er</sup> de ces facteurs



est un polynôme par rapport à l'une des variables.

Pour cela, nous généraliserons un théorème connu de Cauchy: Si une fonction algébrique  $f(x, y)$  a pour racine l'épi:  $x=0, y=0$ , l'équation:  $f(0, y)=0$  a  $n$  racines nulles en  $y$ . Si on donne à  $x$  une valeur  $\varepsilon$  voisine de 0, l'éq:  $f(\varepsilon, y)=0$

aura  $n$  racines voisines de 0 (Ce théorème assure la continuité d'une courbe algébrique) - On peut étendre ce théorème à une fonction holomorphe dans le voisinage de la racine:  $x=0, y=0$ .

- Supposons que  $f(0, y)$  ne s'annule pas identiquement; entourons le point  $y=0$  dans son plan d'un cercle de rayon  $r$ ; on peut développer à l'intérieur de ce cercle  $f(x, y)$  suivant les puissances de  $y$ :

$$f(x, y) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \dots + A_n y^n + \dots$$

et puisque par hypothèse, l'équation:  $f(0, y)=0$  a  $n$  racines en  $y$  égales à 0, on a (les coefficients  $A$  étant des fonctions holomorphes de  $x$  dans un cercle de centre:  $x=0$  et de rayon  $\rho$ ):  $A_0(0)=0 \quad A_1(0)=0 \quad \dots \quad A_{n-1}(0)=0$  et:  $A_n(0) \neq 0$

Nous poserons donc:

$$f(x, y) = A_n y^n (1 + P + Q)$$

$$P = \frac{A_0}{A_n y^n} + \frac{A_1}{A_n y^{n-1}} + \frac{A_2}{A_n y^{n-2}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{A_n y}$$

$$Q = \frac{A_{n+1}}{A_n} y + \frac{A_{n+2}}{A_n} y^2 + \frac{A_{n+3}}{A_n} y^3 + \dots$$

Cherchons les limites supérieures de  $P$  et de  $Q$ . On peut toujours supposer  $A_n \neq 0$  dans le cercle de rayon  $\rho$  (en prenant  $\rho$  suffisamment petit)



Soit  $B$  le module minimum de  $A_n$  dans ce cercle:  $|A_n(x)| \geq B$   
 Soit  $M$  le module maximum de  $f(x, y)$  pour quand:  $|x| \leq \rho$ .  
 $x$  situé dans le même cercle  $\rho$ ; les polynômes  $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$   
 étant les coefficients des puissances successives de  $y$ , sont les dérivées de  
 même ordre de  $f(x, y)$  par rapport à  $y$ , divisées par la factorielle  
 correspondante; on a donc, en vertu d'un lemme précédent (page 38);  
 $|A_{n+v}| < \frac{M}{z^{n+v}}$  pour  $|y| < z$  (la factorielle disparaît.)

Donc:  $|Q| < \frac{M}{B} \left[ \frac{y}{z^{n+1}} + \frac{y^2}{z^{n+2}} + \dots \right]$

Supposons  $y$  dans un second cercle plus petit:  $|y| \leq z_0 < z$ ;

$$|Q| < \frac{M}{B z^n} \left[ \frac{z_0}{z} + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^3 + \dots \right] = \frac{M}{B z^n} \cdot \left(\frac{z_0}{z}\right) \frac{1}{1 - \frac{z_0}{z}}$$

Cette limite peut être rendue aussi petite qu'on le veut, puisqu'elle s'annule  
 pour  $z_0 = 0$ ; on prendra donc  $z_0$  assez petit pour que cette limite  
 soit au plus égale à  $\frac{1}{2}$ ; on aura donc:  $|Q| < \frac{1}{2}$  pour  $\begin{cases} |x| < \rho \\ |y| < z_0 \end{cases}$

Cherchons la limite supérieure de  $P$ , qui est une somme finie.

Supposons  $y$  situé sur la circonférence  $z_0$ ; soit  $C$  le plus grand des  
 modules des coefficients:  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  pour  $|x| < \rho$ ;  
 on aura:  $|P| < \frac{C}{B z_0^n} + \frac{C}{B z_0^{n-1}} + \frac{C}{B z_0^{n-2}} + \dots + \frac{C}{B z_0}$

On peut prendre  $C$  aussi petit qu'on veut, puisque les  $n$  fonctions  
 de  $x$ :  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  s'annulent pour  $x = 0$ .

On prendra donc  $\rho_0 < \rho$  assez petit pour que  $x$  étant enfermé  
 dans le cercle  $\rho_0$ , on puisse rendre  $C \leq 2B(z_0^n + z_0^{n-1} + \dots + z_0) = \frac{B z_0}{1 - z_0}$



On aura dans ces conditions:  $|P| < \frac{1}{2}$  pour:  $\begin{cases} |x| < \rho_0 \\ |y| = \tau_0 \end{cases}$ .

Donnons maintenant à  $x$  une valeur quelconque  $x_1$  à l'intérieur du cercle  $\rho_0$ ; on va prouver que l'équation:  $f(x_1, y) = 0$  a  $n$  racines dans le cercle  $\tau_0$ ; si  $x_1 = 0$ , ces racines seraient:  $y = 0$ .

Preuve: donc  $x_1 \neq 0$ , et appliquons à la fonction d'une seule variable  $y$ :  $f(x_1, y)$  le théorème de Cauchy énoncé sous cette forme:

Le nombre des racines d'une équation  $f(x) = 0$  comprises à l'intérieur d'un contour <sup>fermé</sup> est égal à la variation d'argument de  $f(x)$  le long de ce contour après un tour complet. — En effet, on considère l'intégrale:  $\int \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \log f(z)$  qui donne ce nombre ( $\times 2\pi$ )

Or la variation du logarithme est égale à la variation d'argument.

Cherchons donc quelle est la variation d'argument de la fonction:

$f(x_1, y) = A_n y^n (1 + P + Q)$   
dans un tour complet sur le cercle  $\tau_0$ . C'est la somme des variations des arguments de chacun des facteurs. Or  $A_n$  est une constante, son argument ne varie pas. Quant à:  $(1 + P + Q)$ , ce facteur est égal à:  $(1 + R)$  où  $|R| < 1$

donc son argument reprend la même valeur après un tour complet; sa variation est nulle. Reste la variation d'argument de  $y^n$ , qui est  $2\pi n$ ; ainsi  $n$  est le nombre des racines de  $f(x_1, y) = 0$  comprises dans le cercle  $\tau_0$ .

Cela posé, on peut obtenir la décomposition de  $f(x, y)$  en 2 facteurs dont l'un seulement s'annule pour:  $x = 0, y = 0$ .

Rappelons les conditions de ce théorème: on a:  $|Q| < \frac{1}{2}$



pour toute valeur de  $x, y$  dans leurs cercles respectifs  $\rho_0, r_0$ .  
 Mais on n'a:  $|P| < \frac{1}{2}$  quel que y est sur le cercle  $r_0$ .

Considérons une couronne comprise entre les cercles intérieurs de rayon  $r_0$  et  $r_1$  ( $r_1 < r_0$ ). Si l'on prend  $\rho_1$  assez petit pour que,  $x$  étant contenu dans le cercle de rayon  $\rho_1$ , on ait :

$$(P < \frac{C}{B} \left( \frac{1}{r_1^n} + \frac{1}{r_1^{n-1}} + \dots + \frac{1}{r_1} \right) < \frac{1}{2} \quad |x| < \rho_1$$

l'inégalité:  $|P| < \frac{1}{2}$  sera encore vraie pour  $|y| = r_1$  ;  
 donc elle aura lieu pour  $y$  compris dans la couronne  $(r_0, r_1)$

Donnons à  $x$  une valeur arbitraire fixe: le facteur  $(1 + P + Q)$  sera une fonction holomorphe de  $y$  à l'intérieur de la couronne, et ne s'y annulera pas. La dérivée logarithmique par rapport à  $y$  sera encore une fonction holomorphe de  $y$  dans la couronne  $(r_0, r_1)$  on pourra la développer en une série de Laurent;

$G_p$  étant une fonction holomorphe de  $x$  située à l'intérieur du cercle  $\rho_1$  ; on a donc pour la dérivée logarithmique de  $f$  par rapport à  $y$ :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} G_p y^p \quad r_1 < |y| < r_0$$

Les valeurs de  $y$  qui rendent infinie la dérivée logarithmique de  $f$  sont les  $n$  racines <sub>en y</sub> de l'équation:  $f(x, y) = 0$  dans le cercle  $r_1$ .

Posons:  $F(y) = (y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_n)$

Le quotient:  $\frac{f}{F}$  restera fini dans tout le cercle  $r_1$  ; donc sa dérivée logarithmique restera finie, c'est-à-dire que:  $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{F}$  sera une fonction finie de  $y$  ; or, puisque:  $\frac{\partial f}{\partial y} = \sum G_p y^p$ ,



et que  $\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{F}$  est la seule partie de  $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}$  qui devienne infinie, cette dérivée est égale à la somme des termes qui contiennent les puissances négatives de  $y$  dans la série de Laurent; on a donc:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{F} = \sum_{p=-1}^{p=-\infty} G_p y^p \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{F} = \sum_{p=0}^{p=+\infty} G_p y^p$$

$$\text{Or: } \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{F} = \frac{1}{y-y_1} + \frac{1}{y-y_2} + \dots + \frac{1}{y-y_n}$$

$$= \frac{n}{y} + \frac{\sum y_i}{y^2} + \frac{\sum y_i^2}{y^3} + \dots + \frac{\sum y_i^{n-1}}{y^n} + \dots$$

On a donc:  $n = G_{-1}$ ,  $\sum y_i = G_{-2}$ ,  $\sum y_i^2 = G_{-3}$ ,  $\dots$ ,  $\sum y_i^{n-1} = G_{-n}$ ,  $\dots$

ce sont des fonctions holomorphes de  $x$ ;  $F$  sera donc une fonction de  $x$  de la forme:

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} y + a_n$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$  étant des fonctions symétriques de  $x$ . Soit  $F(y, x)$  est un polynôme en  $y$  dont les coefficients sont holomorphes en  $x$ . Intégrons les dérivées logarithmiques dont la différence est une série ordonnée suivant les puissances positives de  $y$ :

$$\log f - \log F = H(y, x) + \log C$$

$H$  étant holomorphe quand  $x$  est dans le cercle  $\rho_1$  et  $y$  dans le cercle  $r_0$ ;  $y$  peut être non seulement dans la couronne  $(r_0, r_1)$ , mais dans le cercle intérieur  $r_1$ , car la série qui procède suivant les puissances positives de  $y$  ( $0 < p < +\infty$ ) est valable pour tout l'intérieur du cercle  $r_0$ , de sorte que les fonctions  $G_p$  définies dans la couronne sont prolongées analytiquement dans le cercle intérieur  $r_1$ . On a, en passant



aux nombres:  $f(x, y) = F(x, y) C e^{H(y, x)}$

$C$  est une constante par rapport à  $y$ , c.à.d. une fonction de  $x$ . Pour avoir sa valeur, il suffira de donner à  $y$  une valeur particulière  $b$  prise à l'intérieur de la couronne:

$$\frac{f(x, b)}{F(x, b)} e^{-H(b, x)} = C(x)$$

Cette fonction de  $x$  ne s'annule pas dans le cercle  $p$ , car  $f$  et  $F$  ne s'y annulent pas, et  $e^{-H}$  n'est jamais nulle. On a donc en somme la relation identique:

$$f(x, y) = F(x, y) K(x, y) \quad K \neq 0 \quad |x| < p, \quad |y| < r_0$$

Ainsi est mise en évidence la partie de la fonction qui s'annule pour  $x=0, y=0$ , et qui pour  $x$  voisin de 0, admet  $n$  racines en  $y$  voisines de 0. Remarquons que ce facteur  $F(x, y)$  qui renferme toute la discontinuité de la fonction  $f(x, y)$  au point  $(x=0, y=0)$  est un polynôme du degré  $n$  en  $y$ ; c'est ce qui fait l'intérêt de cette décomposition en facteurs, due à M. Weierstrass.

C'est aussi ce qui la rend pratique dans l'application à certains cas particuliers.

Soient par exemple 2 fonctions:  $F(x, y)$   $F_1(x, y)$

s'annulant toutes deux pour:  $x=0, y=0$ .

On demande ce que devient leur quotient pour:  $x=0, y=0$

Le rapport:  $\frac{F_1(0,0)}{F(0,0)}$  est en général indéterminé, car il dépend de la relation qui existe entre les variables indépendantes  $x, y$  quand elles tendent simultanément vers 0. Pour savoir si cette indétermination est réelle, il suffit d'employer la décomposition précédente:

$$F(x, y) = f(x, y) K(x, y) \quad F_1(x, y) = f_1(x, y) K_1(x, y)$$



où:  $f(0,0)=0$ ,  $f_1(0,0)=0$ ,  $K(0,0) \geq 0$ ,  $K_1(0,0) \geq 0$ .

Dans le quotient  $\frac{F_1}{F}$ , on n'a pas à tenir compte de  $\frac{K_1}{K}$  qui reste fini pour:  $x=0$ ,  $y=0$ ; on n'aura qu'à considérer le rapport:  $\frac{f_1}{f}$  au voisinage du point:  $x=0$ ,  $y=0$ . Or ce sont 2 polynômes en  $y$ ; donc pour que  $\frac{F_1(0,0)}{F(0,0)}$  ne soit pas nul, il faudra que  $f_1$  soit divisible par  $f$ .

On voit par ce qui précède combien l'extension des propriétés des fonctions analytiques au cas de 2 variables complexes peut devenir délicate et difficile; elle est parfois impossible, par exemple pour la décomposition d'une fonction en facteurs simples.

Nous allons toutefois, pour donner un aperçu de cette extension, définir, d'après M. Poincaré, l'intégrale d'une fonction analytique de 2 variables complexes.

Nous avons défini précédemment à quelq. fu l'intégrale double:

$$\iint A dy dz + B dz dx + C dx dy$$

étendue à une surface limitée, sur un côté déterminé,  $A, B, C$  étant des fonctions de  $x, y, z$ . Étendons cette notion au cas de  $n$  variables:

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . On aura:

$$\iint \sum A_{ik} dx_i dx_k$$

Il s'agit de définir ce symbole.

On considère pour cela  $x_1, x_2, \dots, x_n$  comme <sup>continues</sup> fonctions de 2 paramètres  $u, v$ ; dans le plan  $(u, v)$  on assigne le point  $(u, v)$  à décrire une aire limitée. Et ces valeurs ou points  $(u, v)$  correspondent des systèmes de valeurs de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  formant un ensemble continu, qu'on peut



appeler, pour la commodité du langage, une surface dans l'espace à  $n$  dimensions -  $A_{ik}$  est une certaine fonction de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Cela posé, l'intégrale double proposée pourra s'écrire:

$$\iint \sum A_{ik} \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(u, v)} du dv \quad \text{étendue à l'aire limitée } (u, v)$$

C'est maintenant une intégrale double parfaitement déterminée -

En donnant à  $i$  et à  $k$  toutes les valeurs  $1, 2, 3, \dots, n$ , on aura des couples de termes correspondant aux mêmes valeurs, par exemple:

$$A_{ik} \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(u, v)} \quad \text{et} \quad A_{ki} \frac{\partial(x_k, x_i)}{\partial(u, v)}$$

Or:  $A_{ki} \frac{\partial(x_k, x_i)}{\partial(u, v)} = - A_{ik} \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(u, v)}$  Donc, si l'on pose:

$A_{ik} = -A_{ki}$ , on aura 2 fois le 1er terme ou  $A_{ik}$ . Par exemple, dans le cas de l'intégrale:  $\iint A dy dz + B dz dx + C dx dy$

où  $n=3$ , on aura:  $A_{2,3} = \frac{A}{2}$   $A_{3,1} = \frac{B}{2}$   $A_{1,2} = \frac{C}{2}$ .

Proposons-nous maintenant le même problème que pour l'intégrale à 3 variables: cherchons à quelles conditions doivent satisfaire les fonctions données  $A_{ik}$  pour que l'intégrale double ne dépende pas de la surface d'intégration, mais seulement de son contour.

Pour cela, nous transformerons cette intégrale en une intégrale à 3 variables étendue à une surface de l'espace à 3 dimensions, en rendant  $x_1, x_2, \dots, x_n$  fonctions continues de  $X, Y, Z$ :

$$x_1 = f_1(XYZ) \quad x_2 = f_2(XYZ) \quad \dots \quad x_n = f_n(XYZ)$$

$X, Y, Z$  deviendront des fonctions de  $u, v$ , c'est-à-dire décriront une surface dans l'espace à 3 dimensions; on a, par une formule précédemment



49

Page 27

établie:  $\frac{\partial(x_i x_k)}{\partial(uv)} = \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(XY)} \frac{\partial(XY)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(YZ)} \frac{\partial(YZ)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(ZX)} \frac{\partial(ZX)}{\partial(uv)}$

L'intégrale devient:

$$\iint \sum A_{ik} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(YZ)} dY dZ + \sum A_{ik} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(ZX)} dZ dX + \sum A_{ik} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(XY)} dX dY$$

intégrale superficielle de la forme:  $\iint A dy dz + B dz dx + C dx dy$   
prise suivant la surface dont les coordonnées sont  $X, Y, Z$  déterminées par les paramètres  $u, v$ . Écrivons, en appliquant un théorème précédent, la condition d'intégrabilité:  $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$ . Page 23

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ \sum \sum A_{ik} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(YZ)} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \sum \sum A_{ik} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(ZX)} \right] + \frac{\partial}{\partial Z} \left[ \sum \sum A_{ik} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(XY)} \right] = 0.$$

Nous avons indiqué une double sommation relative aux indices  $i, k$ .

Cette identité doit avoir lieu quelles que soient les fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_n$  prises arbitrairement. Les  $A_{ik}$  étant des fonctions de  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  sont devenues des fonctions de  $X, Y, Z$ . Prenons d'abord les dérivées des dérivées placées entre crochets;  $A_{ik}$ , facteur commun, aura pour

coefficient:  $\frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(YZ)} + \frac{\partial}{\partial Y} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(ZX)} + \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(XY)} = 0$

Cette somme est identiquement nulle quelles que soient  $f_i$  et  $f_k$ .

Prenons ensuite les dérivées de  $A_{ik}$ :  $\frac{\partial}{\partial X} A_{ik} = \sum_h \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial X}$  etc.

On aura donc au total:

$$\sum_i \sum_k \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(YZ)} \sum_h \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial f_h}{\partial X} + \sum_i \sum_k \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(ZX)} \sum_h \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial f_h}{\partial Y} + \sum_i \sum_k \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(XY)} \sum_h \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial f_h}{\partial Z}$$

Réunissons les termes en  $(i, k, h)$ :

$$\sum \sum \sum \left[ \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \cdot \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(XY)} \frac{\partial f_h}{\partial Z} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(YZ)} \frac{\partial f_h}{\partial X} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(ZX)} \frac{\partial f_h}{\partial Y} \right]$$



ce qui revient à:  $\sum \sum \sum \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial (f_i f_k f_h)}{\partial (XYZ)} = 0$  (condition)

la sommation triple étant étendue à tous les arrangements  $(i, k, h)$ . Or le déterminant fonctionnel se trouve en facteur dans toutes les termes qui contiennent  $(i, k, h)$  en permutation circulaire; on a donc:

$$\sum \sum \sum \left[ \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} + \frac{\partial A_{kh}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{hi}}{\partial x_k} \right] \frac{\partial (f_i f_k f_h)}{\partial (XYZ)} = 0$$

La sommation triple étant étendue à toutes les combinaisons des 3 indices ne formant pas entre elles de permutations circulaires. Cette condition devant être vérifiée identiquement quelles que soient les fonctions  $f_i f_k f_h$ , la somme entre crochets doit être identiquement nulle, quels que soient  $x_i x_k x_h$ :

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} + \frac{\partial A_{kh}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{hi}}{\partial x_k} = 0$$

On aurait une identité semblable pour le terme contenant  $(i, h, k)$  dans l'ordre inverse:

$$\frac{\partial A_{ih}}{\partial x_k} + \frac{\partial A_{hk}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{ki}}{\partial x_h} = 0$$

Or, puisque l'on a posé:  $A_{ik} = -A_{ki}$ , etc. cette identité se réduit à la précédente (le 1<sup>er</sup> membre étant seulement changé de signe). On a donc autant d'identités semblables qu'il y a de combinaisons de  $n$  indices 3 à 3:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Telles sont les conditions de

possibilité de l'intégrale de surface à  $n$  variables; on voit que pour  $n=3$ , on retrouve l'unique condition, qui nous a d'ailleurs servi à démontrer ce théorème général:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Cela posé, considérons 2 intégrales de la forme:  $\iint A_{ik} dx_i dx_k$  où  $x_1 x_2 \dots x_n$  sont respectivement exprimés en fonction de  $u, v$  par:  $x_1 = f_1(u, v)$   $x_2 = f_2(u, v)$  -----  $x_n = f_n(u, v)$



et par:  $x_1 = F_1(u, v)$   $x_2 = F_2(u, v)$  . . . . .  $x_n = F_n(u, v)$

et supposons que dans ces 2 systèmes,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  prennent les mêmes valeurs sur un contour  $\mathcal{C}$ , dans le plan des  $(u, v)$ . Ces 2 systèmes définissent 2 surfaces,  $\sigma$  et  $\Sigma$ , dans l'espace à  $n$  dimensions, et ces 2 surfaces passeront par le même contour  $\Gamma$  correspondant à  $\mathcal{C}$ .

On va prouver que les 2 intégrales prises sur ces 2 surfaces  $\sigma, \Sigma$  dans l'intérieur de leur contour commun  $\Gamma$  sont égales.

Pour cela, on peut représenter les 2 surfaces par les mêmes équations; en effet, soit on pose:  $x_i = f_i(u, v) \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + F_i(u, v) \frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$

on voit que pour:  $\lambda = \lambda_1$ ,  $x_i$  se réduit à  $F_i$ ,

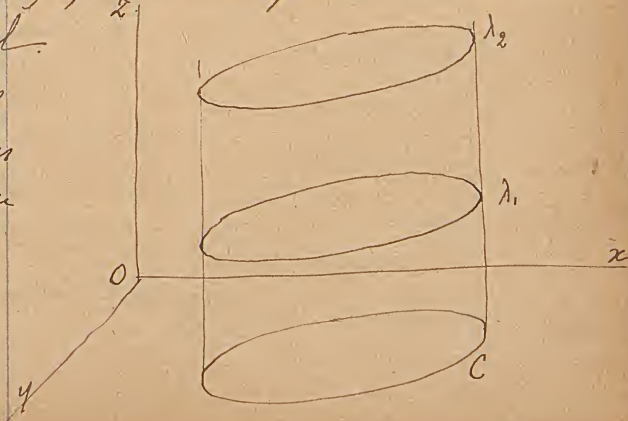
et pour:  $\lambda = \lambda_2$ ,  $x_i$  ———  $f_i$ .

En faisant varier  $\lambda$  d'une manière continue, on obtient une famille de surfaces (dans l'espace à  $n$  dimensions) qui passent toutes par le même contour  $\Gamma$ , car sur ce contour:  $f_i = F_i$ , alors  $x_i$  se réduit à:  $f_i$  ou  $F_i$ .

On peut donc considérer maintenant  $x_1, x_2, \dots, x_n$  comme fonctions des 3 quantités  $u, v, \lambda$ , que nous appellerons:  $X, Y, Z$ .

L'intégrale deviendra alors une intégrale superficielle ordinaire dans l'espace à 3 dimensions ( $X, Y, Z$ ), et si on la prend sur une surface fermée, le résultat sera nul.

Soit donc le contour  $\mathcal{C}$  tracé dans le plan des  $(X, Y)$  ou  $(u, v)$ ; menons par ce contour une surface cylindrique parallèle à  $Oz$ ; coupons-la par les





Plans:  $z = \lambda_1$ ,  $z = \lambda_2$ , suivant les contours  $C_1, C_2$  égaux à  $C$ .  
 On délimite ainsi un cylindre; l'intégrale prise sur la surface de ce cylindre sera nulle. Or les 2 intégrales considérées, prises dans l'espace à  $n$  dimensions sur les surfaces  $\sigma$  et  $\Sigma$ , deviennent, dans l'espace  $OXVZ$ , les intégrales prises sur les bases du cylindre ( $\lambda = \lambda_1$ , ( $\lambda = \lambda_2$ ) dans le même sens; tout revient à prouver que ces 2 intégrales sont égales, ou, si l'on change le signe de l'une d'elles pour qu'elles soient toutes deux prises sur la face extérieure du cylindre, par exemple, que leur somme algébrique (cà d. leur différence) est nulle.  
 On a en général: 
$$\iint A_{ix} dx_i dx_x = \iint A dy dz + B dz dX + C dX dY$$

quand on y fait  $z = \lambda_1$ ,  $z = \lambda_2$ , pour avoir les intégrales des bases, elles se réduisent à: 
$$\iint C dX dY = \iint C du dv.$$

Or, puisque l'intégrale prise sur la surface totale est nulle, il suffit de prouver que l'intégrale prise sur la surface latérale est nulle.

On commencera par intégrer le long des génératrices, pour faire la somme de ces intégrales. Or, le long d'une génératrice  $(u, v)$ , les sommes de ces intégrales <sup>le long de C</sup>  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ont la même valeur, car elles sont indépendantes de  $\lambda$ : 
$$x_i = f_i(u, v) = F_i(u, v)$$

donc toutes les dérivées partielles de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  par rapport à  $\lambda$  sont nulles, et tous les termes de l'intégrale prise suivant une génératrice se réduisent à zéro; par suite l'intégrale totale prise sur la surface latérale est identiquement nulle, c. q. f. d.

Ainsi, quand les conditions d'intégrabilité sont remplies, la valeur de l'intégrale prise sur une surface quelconque passant par un contour fixe est constante. On peut déformer cette surface de toutes les manières, pourvu qu'elle ne franchisse jamais un point où les fonctions soient



discontinues.

Supposons maintenant qu'on ait 2 variables complexes :

$$x = x_1 + ix_2$$

$$y = y_1 + iy_2$$

Une fonction analytique de ces 2 variables pourra s'écrire :

$$f(x, y) = f(x_1, x_2, y_1, y_2) = P(x_1, x_2, y_1, y_2) + iQ(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

et l'on a entre les 2 fonctions réelles  $P$  et  $Q$  les relations connus :

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = -\frac{\partial Q}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y_1} = \frac{\partial Q}{\partial y_2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y_2} = -\frac{\partial Q}{\partial y_1}$$

Si  $x_1, x_2, y_1, y_2$  sont 4 fonctions réelles de  $u, v$ ,  $x, y$  seront 2 fonctions complexes de  $u, v$ . L'intégrale double de  $f$  devient alors :

$$\iint f(x, y) dx dy = \iint (P + iQ)(dx_1 + i dx_2)(dy_1 + i dy_2)$$

$$\text{Or : } (dx_1 + i dx_2)(dy_1 + i dy_2) = dx_1 dy_1 - dx_2 dy_2 + i(dx_2 dy_1 + dx_1 dy_2)$$

$$\text{d'où l'intégrale : } \iint (P + iQ) [dx_1 dy_1 - dx_2 dy_2 + i(dx_2 dy_1 + dx_1 dy_2)]$$

qui se dédouble en 2 intégrales réelles :

$$\iint P(dx_1 dy_1 - dx_2 dy_2) + Q(dx_2 dy_1 + dx_1 dy_2) + i \iint Q(dx_1 dy_1 - dx_2 dy_2) + P(dx_2 dy_1 + dx_1 dy_2)$$

Telle sera par définition la signification de l'intégrale double d'une fonction analytique de 2 variables complexes. Cette intégrale est ainsi complètement définie, et ramène à 2 intégrales doubles de fonctions réelles des variables réelles  $u, v$ .

On peut généraliser le théorème de Cauchy établi pour les fonctions analytiques d'une variable complexe, et démontrer que cette intégrale double est indépendante de la surface d'intégration (dans l'espace à 4 dimensions) et ne dépend que de son contour. Pour cela



il suffit de vérifier les conditions d'intégrabilité sur les L'intégrales réelles obtenues; il y en a 4 pour chacune d'elles, et on les obtiendra en considérant tour à tour comme nulles les 4 variables réelles  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Posons d'abord:  $x_4 = 0$ : condition:  $\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{31}}{\partial x_2} = 0$

L'intégrale se réduit à:  $\iint P dx_1 dx_3 - Q dx_2 dx_3$   
 $A_{31} = -P \quad A_{23} = -Q \quad A_{12} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0$

Cette condition est vérifiée, car on a:  $\frac{\partial P}{\partial x_2} = -\frac{\partial Q}{\partial x_1}$ .

Posons:  $x_1 = 0$ : condition:  $\frac{\partial A_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial A_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{42}}{\partial x_3} = 0$

L'intégrale se réduit à:  $-\iint P dx_3 dx_4 + Q dx_2 dx_3$   
 $A_{23} = Q \quad A_{24} = -P \quad A_{34} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial x_4} - \frac{\partial P}{\partial x_3} = 0$

Condition vérifiée, car on a:  $\frac{\partial P}{\partial x_3} = \frac{\partial Q}{\partial x_4}$ .

Posons:  $x_2 = 0$ . condition:  $\frac{\partial A_{13}}{\partial x_4} + \frac{\partial A_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{41}}{\partial x_3} = 0$

L'intégrale se réduit à:  $\iint P dx_1 dx_3 - Q dx_2 dx_4$   
 $A_{13} = P \quad A_{41} = -Q \quad A_{34} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial x_4} + \frac{\partial Q}{\partial x_3} = 0$

Condition vérifiée, car on a:  $\frac{\partial P}{\partial x_4} = -\frac{\partial Q}{\partial x_3}$ .

Posons enfin:  $x_3 = 0$ : condition:  $\frac{\partial A_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial A_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{14}}{\partial x_2} = 0$

L'intégrale se réduit à:  $-\iint P dx_2 dx_4 + Q dx_1 dx_4$   
 $A_{41} = P \quad A_{44} = -Q \quad A_{12} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial x_4} - \frac{\partial Q}{\partial x_2} = 0$

Condition vérifiée, car on a:  $\frac{\partial P}{\partial x_4} = \frac{\partial Q}{\partial x_2}$ .



On vérifierait de même les 4 conditions d'intégrabilité sur la seconde intégrale; le théorème est donc démontré.

On a démontré précédemment que l'intégrale  $\iint A_{ix} dx_i dx_x$  est nulle quand on la prend suivant une surface fermée; on entend par surface fermée dans l'espace à  $n$  dimensions l'ensemble des points  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  quand le point  $(XYZ)$  décrit une surface fermée dans l'espace à 3 dimensions.

Ce théorème suppose que les fonctions sont continues à l'intérieur de la surface fermée. L'intégrale prise sur une surface fermée ne sera pas nulle, si les fonctions deviennent infinies à l'intérieur.

Nous allons vérifier ce fait sur un exemple particulier: considérons l'intégrale:

$$\iint \frac{R(x, y)}{xy} dx dy$$

son dénominateur devient infini pour  $x=0$ ,  $y=0$ . Dans le plan des  $x$  et dans le plan des  $y$ , l'origine est un point de discontinuité de la fonction. Définissons les 2 variables complexes en fonction de 2 paramètres,  $u, v$ ; et posons par exemple:

$$x = re^{iu}$$

$$y = r'e^{iv}$$

les points  $x, y$  décrivent ainsi chacun une circonférence dans leur plan respectif autour de l'origine, quand  $u$  et  $v$  varient de 0 à  $2\pi$ .

Dans le plan des  $(uv)$  on prendra pour champ d'intégration le carré formé sur les 2 axes avec un côté égal à  $2\pi$ . On aura ainsi une surface fermée dans l'espace à 4 dimensions; en effet, rien n'arrête  $x, y$  qui tournent indéfiniment sur leurs cercles; et le carré de côté  $2\pi$  dans le plan  $(uv)$  semble former la fonction, ce n'est qu'en apparence, car la fonction reprend les mêmes valeurs sur les côtés opposés de ce carré (pour 0 et  $2\pi$ ) qui représentent sa double période.



L'intégrale proposée devient: 
$$-\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R(re^{iu}, re^{iv}) du dv$$

car:  $dx dy = -r^2 e^{iu} e^{iv}$ , ce qui fait disparaître le dénominateur —  
 L'intégrale est prise le long des 2 cercles qui décrivent  $x$  et  $y$ ;  $u$  et  $v$   
 varient de 0 à  $2\pi$ . La valeur de cette intégrale dépend de la valeur  
 de  $R$  pour le point:  $x=0, y=0$  intérieur à la surface fermée;  
 car dans le développement de  $R$  tous les termes s'annulent, sauf le  
 1<sup>er</sup>:  $R(0,0)$  qui est sa valeur au pôle. L'intégrale prise sur  
 la surface fermée est donc égale à:  $-R(0,0) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} du dv = -4\pi^2 R(0,0)$   
 $R(0,0)$  peut s'appeler le résidu de la fonction  $R$  relatif au pôle  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ .  
 Considérons plus généralement l'intégrale double:

$$\iint \frac{R(x,y)}{P(x,y) Q(x,y)} dx dy$$

qu'on peut ramener à la précédente par un changement de variables.  
 Supposons qu'on la prenne sur une surface fermée qui contienne une  
 racine simple des équations:  $P(x,y)=0$   $Q(x,y)=0$   
 de sorte que leur déterminant fonctionnel ne soit pas nul:  $\frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)} \neq 0$ .  
 On peut toujours faire en sorte que ce point-racine devienne l'origine  
 dans l'espace à  $h$  dimensions  $(x,y)$ . Posons:

$$P(x,y) = X$$

$$Q(x,y) = Y$$

Ces formules de transformation font correspondre les points  $(x,y)$  à  $(X,Y)$   
 d'une manière univoque; en particulier à l'origine  $(x=0, y=0)$   
 correspond l'origine:  $(X=0, Y=0)$   $P(0,0)=0$   $Q(0,0)=0$ .

On peut donc établir une correspondance uniforme entre 2 aires au voi-  
 sinage des 2 origines. L'intégrale devient, dans l'espace à  $h$  dim.  $(X,Y)$ :



$$\iint \frac{R(x,y) \frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)} dX dY}{XY}$$

$$\text{où: } \frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)} = - \frac{1}{\frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)}}$$

Il est ainsi ramené à la forme précédente.

La valeur qu'elle prend sur la surface d'intégration (dans l'espace à 4 dimensions  $x, y$ ) est égale à:  $-4\pi^2 \frac{R(0,0)}{\left(\frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)}\right)_{x=0, y=0}}$

$\frac{R(0,0)}{\frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)}}$  est le résidu de  $R$  relatif au pôle:  $x=0, y=0$ .

L'ordre des 2 variables  $X, Y$  par rapport aux variables primitives  $x, y$  n'est pas indifférent; changer cet ordre revient à prendre l'intégrale sur l'autre côté de la surface; c'est donc changer le signe de l'intégrale:

$$\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)} = - \frac{\partial(Y,X)}{\partial(x,y)}$$

Appliquons ces résultats à un exemple simple:  $\iint \frac{dx dy}{x^2 + y^2 - 1}$

Considérons les 2 variables complexes  $x, y$  chacune dans son plan; pour avoir les pôles de la fonction, prenons:  $y = \sqrt{1-x^2}$  en donnant au radical un signe déterminé; à chaque valeur de  $x$  correspondra une valeur de  $y$ . Laissons  $x$  constant:  $x = x_1$ , soit  $y_1$  le point correspondant à  $x_1$ ; décrivons autour de  $y_1$  un cercle de rayon fixe; intégrons le long de ce cercle; la fonction aura pour pôle  $y_1$ , et comme elle peut s'écrire:  $\frac{1}{2y_1} \left( \frac{1}{y-y_1} - \frac{1}{y+y_1} \right)$  son résidu relatif à ce pôle est  $\frac{1}{2y_1}$ .

Donc sa valeur suivant ce cercle fixe est:  $\frac{\pi i}{y_1} = \frac{\pi i}{\sqrt{1-x_1^2}}$

Si maintenant on l'intègre par rapport à  $x$  en faisant varier  $x$ , on aura à prendre sur la surface fermée qu'engendre le cercle de centre  $y$  et de

$$\int \frac{\pi i dx}{\sqrt{1-x^2}}$$



53  
rayon constant quand  $x$  se déplace dans son plan suivant une courbe fermée quelconque: comme il faut qu'on revienne à  $x_0$  avec la même valeur qu'on en était parti, le contour fermé doit entourer les 2 points:  $x = +1$ ,  $x = -1$  ou n'en entourer aucun:

car ce sont les racines de  $1-x^2=0$ , c'est-à-dire les pôles de la fonction: son résidu relatif à chacun d'eux est  $\pi i$ , le résidu total doit être 0 ou  $2\pi i$ . La valeur de l'intégrale prise suivant une surface fermée (dans l'espace à 2 dimensions) entourant ces 2 pôles sera:  $-2\pi^2$ .

On peut se faire une idée de la surface sur laquelle on intègre, sinon se la représenter parfaitement: quand  $x$  se déplace,  $y$  se déplace avec son cercle qui lui est invariablement lié, de sorte que ce cercle suit le contour fermé décrit par  $x$  et revient à sa position initiale. Par analogie, avec l'espace à 3 dimensions, on pourra appeler tore la surface ainsi engendrée; la surface d'intégration est donc, si l'on veut, une tore à 2 dimensions.



# Etude des fonctions non uniformes d'une variable imaginaire

Considérons la fonction:  $u = \sqrt{(z-a)(z-b) \dots (z-L)}$

qui a pour points critiques les points  $a, b, \dots, L$ . Si l'on part d'un point  $z_0$  du plan et qu'on y revienne par un circuit n'enfermant aucun des points critiques, on retrouvera la même détermination dont on était parti. Mais si l'on tourne une fois autour du point  $a$ , par exemple, l'argument de  $(z-a)$  variera de  $2\pi$ .

$$z-a = re^{i\theta}$$

$$\sqrt{z-a} = r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

et par conséquent l'argument de  $\sqrt{z-a}$  aura varié de  $\pi$ , c'est-à-dire que  $u$  aura changé de signe. Si l'on tourne 2 fois autour du point  $a$ , ou une fois autour de 2 points  $a, b$  dans le même sens, l'argument de  $\sqrt{(z-a)(z-b) \dots (z-L)}$  aura varié de  $2\pi$ , et on retrouvera  $u$  avec le même signe en  $z_0$ . Donc  $u$  a 2 déterminations égales et de signe contraire qui s'ichangent chaque fois qu'on fait un tour complet autour d'un de ses points critiques.

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

prise suivant un chemin déterminé  $C$  du point 0 au point fixe  $z$ . L'élément différentiel a pour pôles:  $z = +1, z = -1$ .

Sur tout chemin  $C'$  allant de 0 à  $z$ , et n'enfermant entre lui et  $C$  aucun des pôles de la fonction, l'intégrale garde la même valeur; c'est-à-dire qu'on peut déformer le chemin  $C$  de toutes les manières, pourvu qu'il ne franchisse pas un pôle. Tout autre chemin, formant avec  $C$  un contour qui enferme un pôle, est équivalent à un circuit fermé autour de ce pôle et au chemin simple  $C$ : il suffit pour le montrer de prendre 2 fois, en sens inverse, le chemin  $C$ , et de remar-



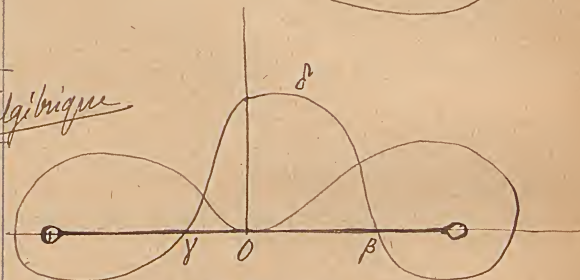
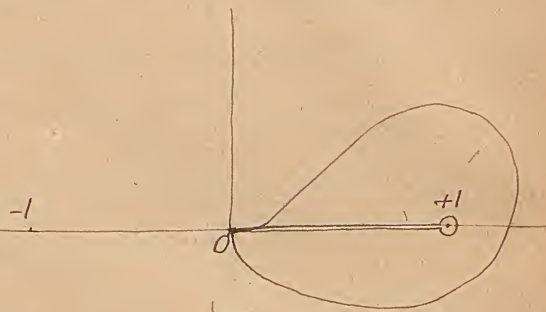
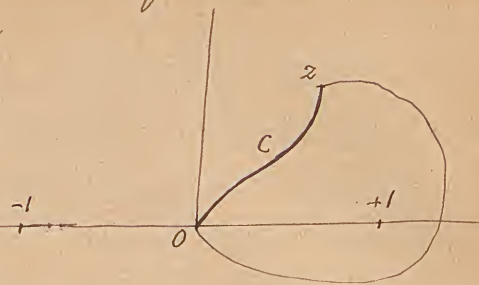
quer que l'intégrale prise sur  
un chemin 2 fois en sens contraire est  
nulle. On est donc ramené à étudier  
les circuits fermés partant de 0 et y  
aboutissant après avoir fait un certain  
nombre de tours autour des pôles.

Or tout circuit faisant un seul tour  
autour d'un des pôles,  $+1$  par exemple,  
peut se réduire, par des déformations  
permises, au double chemin rectiligne  
de 0 à  $+1$  parcouru dans les 2 sens  
et à une circonférence infiniment  
petite entourant le point  $+1$ ;  
l'ensemble s'appelle un lacet. Plus

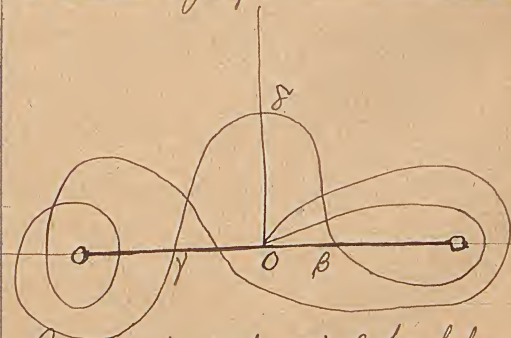
généralement, tout circuit entourant  
les pôles peut se réduire à une somme  
de lacets. Pour le montrer, il suffit  
de revenir à l'origine toutes les fois qu'on  
rencontre un lacet, et de repartir de  
l'origine pour continuer le circuit;  
l'intégrale prise sur les contours  
fermés n'entourant aucun pôle  
est nulle. On trouve ainsi dans

tous les cas le nombre de lacets au-  
quel on peut ramener le contour  
proposé, si compliqué qu'il soit.  
Pour évaluer l'intégrale prise suivant  
un tel contour, il suffit de calculer sa

à chemin 2 fois en sens contraire est



Contour équivalent aux 2 lacets simples:  
le contour  $0\beta\delta\gamma 0$  donne un résultat nul.



Contour équivalent à 2 fois le lacet  $0-1$   
pris dans le même sens et à 2 lacets  $0+1$   
pris en sens contraire; le contour  $0\beta\delta\gamma 0$   
donne un résultat nul.



91  
 valeur sur un lacet simple. Or, sur le cercle de rayon infiniment petit  $\rho$  qui entoure le pôle  $+1$ , par exemple, l'intégrale est infiniment petite avec  $\rho$ , et comme sa valeur est indépendante de  $\rho$ , elle est nulle. Restent les 2 intégrales :

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad \text{et} \quad \int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

qui ne se détruisent pas, bien au contraire : car une fois qu'on a tourné autour du pôle  $+1$ , on a l'autre détermination de la fonction :  $\sqrt{1-z^2}$  a changé de signe, de sorte que les 2 intégrales s'ajoutent ( $dz$  changeant de signe ainsi que  $\sqrt{1-z^2}$  si l'on identifie les limites supérieures et inférieures); on obtient ( $z$  étant réel) :

$$2 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2 \arcsin 1 = \pi.$$

On a supposé qu'on était parti de 0 avec le radical positif, cà d. avec la détermination  $+1$  : on y reviendrait avec la détermination  $-1$ . Si l'on partait de 0 avec celle-ci, on aurait évidemment pour l'intégrale la valeur  $-\pi$ , et on reviendrait en 0 avec la détermination  $+1$ .

De même, l'intégrale prise suivant le lacet  $(0, -1)$  en partant de la détermination  $+1$  (pour le radical) est égale à  $-\pi$ ; en partant de la détermination  $-1$ , à  $+\pi$ .

Ainsi l'intégrale prise sur un circuit quelconque partant de 0 et y aboutissant aura pour valeur la somme algébrique des valeurs qu'elle prend sur les 2 lacets parcourus un certain nombre de fois dans un sens ou dans l'autre, cà d. un multiple de  $\pi$ . Par exemple, si l'on fait 2 fois le tour du pôle  $+1$  dans le même sens, on aura pour résultat :  $+\pi + (-\pi) = 0$ .



En général, si l'on considère tous les chemins qui vont de  $O$  en  $z$ , et qu'on prenne une détermination  $u$  de l'intégrale prise suivant le chemin  $C$ , on les décomposera en un circuit fermé ~~et en un~~ <sup>plus le</sup> chemin  $C$ ; si le circuit fermé fait un nombre pair de tours autour des 2 pôles, c'est-à-dire s'il équivaut à un nombre pair de lacets, la fonction reprendra la même détermination en  $O$ , et son intégrale de  $O$  à  $z$  aura pour valeur:  $2n\pi + u$

Si, au contraire, le circuit contient un nombre impair de lacets, la fonction aura changé de signe en revenant en  $O$  et l'on aura de  $O$  en  $z$  la détermination contraire de l'intégrale  $(-u)$ ; sa valeur totale sera donc:  $(2n+1)\pi - u$ .

Ces 2 formules, qui contiennent la période  $2\pi$  ( $n$  étant entier) représentent toutes les déterminations possibles de l'intégrale:

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad \text{prise le long d'un chemin quelconque}$$

On voit que ces déterminations coïncident, quand  $z$  est réel, avec les déterminations de  $\sin z$ .

Considérons maintenant l'intégrale Multiplicative de 1<sup>re</sup> espèce:

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}$$

prise suivant un chemin quelconque entre 2 points  $z_0, z$  du plan, l'un fixe, l'autre variable. Pour trouver toutes les déterminations de cette intégrale, on cherchera, comme ci-dessus, ses déterminations diverses correspondant aux différents circuits issus de  $z_0$  et y aboutissant. On verra par le même raisonnement, qu'ils feront le même à une somme algébrique des lacets  $(z_0, a) (z_0, b) (z_0, c) (z_0, d)$



pris chacun un certain nombre de fois.  
 Soit  $u$  la détermination de l'intégrale prise de  $z_0$  à  $z$  suivant un certain chemin  $C$ . Soit  $A$  la valeur de la même intégrale prise de  $z_0$  à  $a$  en ligne droite; sa valeur sur le lacet de  $a$  sera  $2A$ . De même, sa valeur sur la droite  $(z_0, b)$  étant  $B$ , sa valeur sur le lacet de  $b$  sera  $2B$ ; sa valeur sur le lacet  $(z_0, c)$  sera  $2C$ , et sur le lacet  $(z_0, d)$ ,  $2D$ . Ces valeurs sont prises sur chaque lacet en partant de la même détermination initiale du radical en  $z_0$ ; elles changent de signe si l'on part de  $z_0$  avec la détermination contraire. Or, quand on a fait un tour autour d'un pôle, c'est-à-dire d'un lacet, on revient en  $z_0$  avec la détermination contraire; si l'on décrit alors un lacet (le même ou un autre) on obtient un résultat changé de signe. Donc, si l'on désigne par  $k_1, k_2, \dots$  les divers valeurs  $2A, 2B, 2C, 2D$  prises dans l'ordre où l'on décrit les lacets correspondants, l'intégrale prise sur un circuit quelconque se réduisant à une somme des lacets pris un certain nombre de fois dans un ordre déterminé aura pour valeur:  $k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + \dots$

Si le nombre des lacets décrits est pair, cette valeur aura la forme:

$$k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + \dots + k_{n-1} - k_n = \sum (k_i - k_j)$$

Or les différences  $(k_i - k_j)$  sont réductibles aux 3 suivantes:

$$w_1 = 2B - 2A \quad w_2 = 2C - 2A \quad w_3 = 2D - 2A$$

et la valeur de l'intégrale est une expression linéaire à coefficients entiers de ces 3 quantités:

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 + m_3 w_3$$

$m_1, m_2, m_3$  étant des entiers positifs ou négatifs.

Si le nombre des lacets est impair, on aura, abstraction faite du dernier,



Le résultat précédent, valable pour tout nombre pair de lacets, auquel on devra ajouter la intégrale prise suivant le dernier lacet; on peut d'ailleurs s'arranger de manière que ce lacet soit celui qu'on voudra, par exemple  $(z_0, a)$ ; car au lieu d'ajouter  $2D$  par exemple, on peut ajouter:  $(2D - 2A) + 2A$  ce qui ne fait qu'augmenter d'une unité le coefficient de  $\omega_3$ . D'ailleurs  $2A$  sera toujours pris positivement, car puisqu'avant de décrire le lacet  $2D$  on n'a décrit un nombre pair, on est revenu en  $z_0$  avec la détermination initiale du radical. Donc la valeur de l'intégrale prise sur un circuit équivalent à un nombre impair de lacets sera de la forme:

$$m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + m_3 \omega_3 + 2A.$$

Considérons maintenant les divers chemins qui unissent de  $z_0$  en  $z_1$ , n'étant la valeur de l'intégrale sur un chemin déterminé  $C$ . Tout autre chemin sera la somme de ce chemin  $C$  et d'un circuit allant de  $z_0$  en  $z_0$ . Si le circuit équivalent à un nombre pair de lacets, ramènera à  $z_0$  avec la détermination initiale de la fonction, et la valeur totale de l'intégrale sera:  $m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + m_3 \omega_3 + u$ .

Si le circuit équivalent à un nombre impair de lacets, la fonction aura changé de signe, et l'intégrale suivant  $C$  aussi; la valeur totale sera alors:  $m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + m_3 \omega_3 + 2A - u$ .

Ces 2 formules comprennent toutes les déterminations possibles de l'intégrale elliptique prise de  $z_0$  en  $z_1$  suivant un chemin quelconque.

Les 3 périodes  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  de l'intégrale elliptique ne sont pas indépendantes. Pour le prouver, prenons l'intégrale suivant les 4 lacets successifs; elle équivaut à l'intégrale prise sur un cercle de rayon très-grand qui contiendrait les 4 pôles; or cette intégrale est nulle,



65

car, soit  $R$  rayon infiniment grand de ce cercle:  $z$  est de l'ordre de  $R$ , dz aussi; le radical sera de l'ordre de  $R^2$ ; donc l'élément différentiel sera de l'ordre de  $\frac{1}{R}$ , c-à-d. infiniment petit. Or l'intégrale est indépendante de  $R$ ; donc elle est nulle.

Evaluons donc l'intégrale prise suivant les lacets; elle doit être nulle:

$$2A - 2B + 2C - 2D = 0 \quad \text{ou:} \quad -w_1 + w_2 - w_3 = 0$$

Il existe donc une relation linéaire entre les 3 périodes, si l'on a par exemple:

$$w_3 = w_2 - w_1.$$

Il n'existe donc que 2 périodes distinctes  $w_1, w_2$ , et on peut supprimer  $w_3$  dans les formules générales, ce qui revient à ajouter  $m_3$  à  $m_1$  et à retrancher de  $m_2$ :

$$\begin{cases} m_1 w_1 + m_2 w_2 + u \\ m_1 w_1 + m_2 w_2 + 2A - u \end{cases}$$

On va prouver que ces 2 périodes  $w_1, w_2$  sont bien distinctes, ou indépendantes.

On peut d'abord dire autre que leur rapport est imaginaire (si  $a, b, c, d$  sont distincts)

Pour cela, supposons que:  $\frac{w_2}{w_1} = \alpha$  nombre réel -

$\alpha$  est commensurable ou non; on va d'abord prouver que s'il peut être incommensurable, il peut aussi être commensurable; il suffira ensuite de prouver qu'il ne peut être commensurable.

Or  $w_1, w_2$  sont fonctions de  $a, b, c, d$  (comme  $A, B, C$ ).  
Supposons  $a, b, c$  fixes, et  $d$  variable dans le voisinage d'un point  $d_0$ , de sorte que le p.n.  $d$  ne puisse se confondre avec les points  $a, b, c$ ;  
supposons que pour  $d = d_0$ ,  $\frac{w_2}{w_1} = \alpha_0$  nombre incommensurable.  
Or  $A, B, C, D$  sont des fonctions holomorphes de  $d$  dans le voisinage de tout point  $d_0$  situé en dehors des lacets; de sorte que  $\frac{w_2}{w_1} = \varphi(d)$  fonction holomorphe de  $d$  dans le voisinage de  $d_0$ .



On a:  $\varphi(d_0) = \alpha_0$ . On peut prendre un nombre commensurable  $\alpha$  aussi voisin qu'on veut de  $\alpha_0$  (puisque  $\alpha_0$  est réel) et l'équation:

$\varphi(d) = \alpha$  aura une racine aussi voisine qu'on veut de  $d_0$ .  
 Donc si en un point  $d_0$  le rapport  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  est incommensurable, en un point infiniment voisin de  $d_0$  il sera commensurable.

— Supposons maintenant  $\alpha$  commensurable:  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m}{n}$ ,  
 $m$  et  $n$  étant 2 nombres entiers premiers entre eux.

Posez:  $\frac{\omega_2}{m} = \frac{\omega_1}{n} = \omega$   $\omega$  sera une période de l'intégrale.

Le type général des valeurs périodiques de l'intégrale est:  $p\omega_2 + q\omega_1$ ,

$$\text{ou: } p\omega_2 + q\frac{n}{m}\omega_1 = \frac{\omega_2}{m}(pm + qn)$$

Or  $m$  et  $n$  étant premiers entre eux, on peut trouver 2 entiers  $p, q$  tels que:  $pm + qn = 1$ . Donc:  $\frac{\omega_2}{m}, \frac{\omega_1}{n}$  ou  $\omega$

est une période de l'intégrale, et la période unique dont les 2 autres sont des multiples. Or il est impossible que l'intégrale elliptique ait une période unique, et c'est une propriété très importante, que nous allons démontrer.

En effet, supposons que toutes les déterminations de l'intégrale soient représentées par les 2 formules:  $m\omega + u, m\omega + 2A - u$ .

Considérons l'expression:

$$e^{\frac{2\pi i u}{\omega}} + e^{\frac{2\pi i (2A - u)}{\omega}}$$

C'est une fonction de  $z$ , par l'intermédiaire de  $u$ . Elle ne change pas quand on y remplace  $u$  par  $(m\omega + u)$  ou par  $(m\omega + 2A - u)$  car on ne fait ainsi que multiplier les 2 termes par  $e^{2\pi i} = 1$ , en les intervertissant dans le cas. Ainsi, tandis que l'intégrale a une infinité de déterminations pour chaque valeur de  $z$ , cette fonction-ci n'en a qu'une: c'est une fonction uniforme  $G(z)$ . D'autre part,



on a vu que l'intégrale elliptique reste finie pour toute valeur de  $z$ ,  
donc il est fini même pour  $z$  infini; et comme l'exponentielle  
est fonction entière de  $u$ , nous avons une fonction entière  $G(z)$  qui  
reste finie dans tout le plan, et même à l'infini: on sait (1<sup>er</sup> cahier, page  
112) qu'une telle fonction se réduit à une constante; donc:

$$e^{\frac{2\pi i u}{\omega}} + e^{\frac{2\pi i (2A-u)}{\omega}} = K$$

équation du 2<sup>e</sup> degré en  $e^{\frac{2\pi i u}{\omega}}$ ; mais il est impossible que  $u$ , et  
par conséquent  $e^{\frac{2\pi i u}{\omega}}$ , soient constants; donc notre hypothèse  
est absurde:  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  ne peut être un nombre réel.

Rappelons quelques propositions précédemment établies (p. 40):

Soit  $f(x, y)$  une fonction analytique des 2 variables complexes  
 $x, y$ , s'annulant pour  $x=0, y=0$ :  $f(0, 0) = 0$ ,  
et holomorphe au voisinage du point  $(x=0, y=0)$ . Si en ce  
point:  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ , l'équation:  $f(x, y) = 0$   
définit une fonction  $y$  de  $x$ , qui vérifie cette équation au voisi-  
nage du point  $x=0$ , et qui s'annule pour  $x=0$ .

On sait décomposer  $f(x, y)$  en 2 facteurs dont l'un est un  
polynôme en  $y$  et s'annule seul pour  $x=0$ ; on peut  
décrire 2 cercles de centres  $x=0, y=0$ , et tels que si  $x$  est contenu  
dans l'un, l'équation:  $f(x, y)$  ait  $n$  racines dans l'autre;  
n'étant le degré du polynôme en  $y$  qui s'annule pour  $x=0$ :

$$f(x, y) = (y^n + \varphi_1(x)y^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1}(x)y + \varphi_n(x))P(x, y) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(0, 0) \neq 0 \end{array} \right.$$

Les  $n$  racines de l'équation:  $f(x, y) = 0$  en  $y$  sont  
celles de l'équation:  $y^n + \varphi_1(x)y^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1}(x)y + \varphi_n(x) = 0$



où l'on a donné à  $x$  dans les coefficients  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  une valeur déterminée.

Dans le cas présent, où :  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$  pour  $x=0, y=0$ , on a :  $n=1$ ; donc :

$$f(x, y) = [y + \varphi_1(x)] P(x, y)$$

le facteur  $(y + \varphi_1(x))$  s'annulant seul, la fonction implicite de  $x$  définie par l'équation :  $f(x, y) = 0$  dans les 2 cercles considérés n'est autre que :

$$y = -\varphi_1(x) \quad \varphi_1(0) = 0.$$

En particulier, si l'on a l'équation :  $x = G(y)$

$G$  étant une fonction holomorphe dans le voisinage du point :  $y=0$ ;

Si :  $G(0) = 0$  et si :  $G'(0) \neq 0$ ,

cette équation définit une fonction  $y$  holomorphe en  $x$  dans le voisinage du point :  $x=0$ , et s'annulant en ce point.

Ce lemme établi, considérons l'intégrale elliptique de 1<sup>re</sup> espèce sous la forme canonique qu'elle ont donnée Jacobi et Abel :

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} \quad |k| < 1.$$

elle est prise de 0 à 0, c'est-à-dire suivant un circuit fermé comprenant l'origine. On partira de 0 avec la détermination positive de la fonction par exemple, c'est-à-dire avec le signe + du radical. Les 4 pôles de la fonction sont ici :

$+1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ , ces 2 derniers en formant les premiers.

Écrivons les 4 lacets correspondants. — Les 2 lacets  $+1, -1$  ont la forme ordinaire. Pour les lacets  $+\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ , ils devront éviter les points critiques  $+1, -1$  : pour cela, on décrira un demi-cercle





69  
 infiniment petit au-dessous de  $+1$ , par exemple, et on le suivra à  
 l'aller et au retour de  $+\frac{1}{k}$ ; par symétrie, on suivra pour aller à  
 $-\frac{1}{k}$  et en revenant, un demi-cercle infiniment petit tracé au-dessous de  $-1$ .

Posons: 
$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

L'intégrale prise le long du lacet  $+1$  est, comme on sait, égale à  $2K$ .  
 Le lacet symétrique  $-1$  donne la valeur égale et de signe contraire  $-2K$ .  
 Les parties circulaires du lacet  $+\frac{1}{k}$  donnent à la limite 0 pour  
 l'intégrale; on a donc seulement l'intégrale prise de 0 à  $\frac{1}{k}$ ,  
 c.à.d.  $K$ , et l'intégrale prise de  $+1$  à  $+\frac{1}{k}$ . Or dans cet intervalle,  
 l'intégrale est purement imaginaire, la quantité soumise au radical  
 étant constamment négative. Pour la valeur, faisons le changement  
 de variable:  $1-z = \rho e^{\theta i}$

Quand  $z$  va de 0 à 1,  $\rho$  varie de  $+1$  à 0;  $\theta$  reste nul. Quand  
 $z$  tourne d'une demi-circonférence autour de  $+1$ ,  $\theta$  varie de 0 à  $-\pi$ ;  
 enfin quand  $z$  va de  $+1$  à  $+\frac{1}{k}$ ,  $\rho$  varie de 0 à  $1-\frac{1}{k}$ , et  
 $\theta$  est constamment égal à  $-\pi$ , c.à.d. que la valeur de  $(1-z)$   
 a été multipliée par  $e^{-\pi i} = -1$  en passant par  $+1$ . Donc  
 $\sqrt{1-z} = \rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2} i}$  a été multipliée par  $e^{-\frac{\pi}{2} i} = -i$ ; si  
 l'on veut conserver un radical réel, et la continuité de  $(1-z)$ ,  
 il faut renverser  $(1-z^2)$   
 en  $(z^2-1)$  et multiplier le radical par  $-i$ , l'intégrale devient  

$$\int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{dz}{-i \sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} = i \int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} = iK'$$

$K'$  étant une quantité réelle fixe. Ainsi l'intégrale prise de 0 à  $\frac{1}{k}$   
 a pour valeur:  $K + iK'$ ; et prise sur le lacet  $\frac{1}{k}$ ,  $2K + 2iK'$ .



Remarquons que si l'on avait écrit  $+1$  par un demi-cercle inférieur,  $\theta$  aurait varié de  $+i$ , et la valeur de l'intégrale sur cet autre lacet  $+\frac{1}{k}$  aurait été:  $2K - 2iK'$ .

La valeur de l'intégrale prise sur le lacet symétrique  $-\frac{1}{k}$  est évidemment:  $-2K - 2iK'$  quand on passe au-dessous de  $-1$ , comme sur la figure; elle serait:  $-2K + 2iK'$  si on passe au-dessus.

Pour avoir les 2 périodes de l'intégrale elliptique,  $w_1, w_2$ , il suffit de faire la différence des valeurs que l'intégrale prend sur le 1<sup>er</sup> et le 2<sup>e</sup> lacets, puis sur le 1<sup>er</sup> et le 3<sup>e</sup>, par exemple. Prenons le lacet  $+1$  et le lacet  $-1$ ; la différence sera:  $2K - (-2K) = 4K$ .

Prenons le lacet  $+\frac{1}{k}$  et le lacet  $+1$ ; la différence sera:

$$2K + 2iK' - 2K = 2iK'.$$

Les 2 périodes sont donc:  $4K, 2iK'$ .

L'une est réelle, l'autre est purement imaginaire.

Nous allons calculer au moyen de ces 2 périodes des valeurs remarquables de l'intégrale elliptique.

Prenons par exemple l'intégrale de 0 à  $\infty$  suivant  $Ox$ , en évitant le point  $+\frac{1}{k}$  par un demi-cercle supérieur. Les parties circulaires donnent à la limite un résultat nul. L'intégrale comprend donc 3 parties: l'une de 0 à  $+1$ , dont la valeur est  $K$ ; la 2<sup>e</sup> de  $+1$  à  $+\frac{1}{k}$ , dont la valeur est  $iK'$ ; la 3<sup>e</sup>, de  $+\frac{1}{k}$  à  $\infty$ , que nous allons calculer. Nous avons pris, pour  $z$  compris entre  $+1$  et  $+\frac{1}{k}$ , la forme:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-kz^2)}}$$

Or, quand on dépasse  $\frac{1}{k}$ ,  $\sqrt{(1-kz^2)}$  devient imaginaire, et l'on doit faire:

$$\sqrt{1-kz^2} = i\sqrt{kz^2-1}$$



Les 2 facteurs  $i$  donnent  $-1$ ; on doit donc prendre au-delà de  $\frac{1}{k}$  la forme:

$$-\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(k^2z^2-1)}}$$

L'intégrale précédente est essentiellement positive. Pour la valuer, faisons le changement de variable:  $z = \frac{1}{ky}$   $dz = -\frac{1}{ky^2} dy$

$$-\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{-\frac{1}{k} \frac{dy}{y^2}}{\sqrt{(\frac{1}{ky^2}-1)(\frac{1}{y^2}-1)}} = -\int_1^0 \frac{-dy}{\sqrt{(1-ky^2)(1-y^2)}} = -\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-ky^2)}}$$

cà d.  $-K$ . La valeur totale de l'intégrale de 0 à  $+\infty$  est donc:

$$K + iK' - K = iK'$$

L'intégrale prise de 0 à  $\infty$  suivant Oy a la même valeur; en effet, si l'on trace entre Ox, Oy un quart de cercle de rayon infiniment grand, l'intégrale prise sur le contour de ce quadrant (en évitant  $+1$  et  $+\frac{1}{k}$  par des demi-cercles supérieurs) sera nulle; or l'intégrale prise sur le quart de cercle est nulle à la limite, donc les intégrales prises sur Ox, Oy infinis, chacune à partir de 0, sont égales. — Si l'on pose:  $z = iy$ , on a donc l'égalité:

$$\int_0^{\infty} \frac{idy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}} = iK'$$

d'où cette expression nouvelle de  $K'$ :  $K' = \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}}$

En résumé, la forme générale de l'intégrale elliptique prise de 0 à un p. quelconque  $z$  est, il faut une de ses déterminations,  $w_1, w_2$  les 2 périodes  $4K, 2iK'$ :  $m_1 w_1 + m_2 w_2 + u$ ,  $m_1 w_1 + m_2 w_2 + 2K - u$

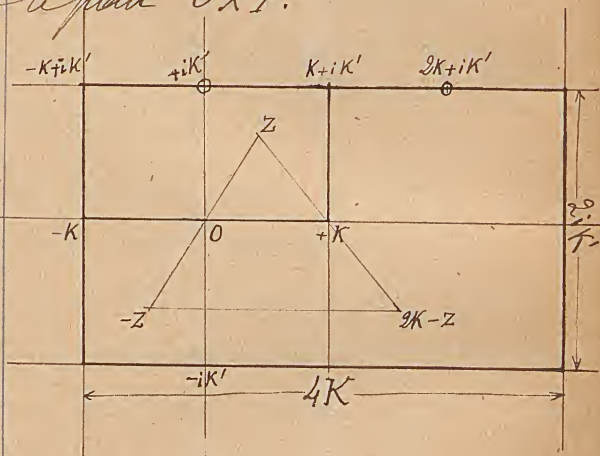


Nous allons représenter géométriquement les valeurs de ce qui correspond aux valeurs de  $z$  situées dans le demi-plan supérieur à  $Ox$ . Rappelons d'abord les valeurs que prend l'intégrale sur l'axe  $Ox$ ; en partant de 0: en  $+1$ ,  $K$ ; en  $+\frac{1}{k}$ ,  $K+iK'$ ; en circulant  $+1$  par un demi-cercle supérieur. En  $-1$ ,  $-K$ ; en  $-\frac{1}{k}$ ,  $-K+iK'$ ; en circulant encore  $-1$  par un demi-cercle supérieur. Le demi-plan situé au dessus de ce contour ne contient plus aucun point critique. Représentons la valeur de l'intégrale, prise de 0 à  $z$ , par:

$$Z = X + iY$$

dans le plan  $OXY$ .

Quand  $z$  va de 0 à  $+1$ ,  $Z$  va de 0 à  $+K$ ; quand  $z$  va de  $+1$  à  $+\frac{1}{k}$ ,  $Z$  varie de  $+iK'$ , parallèlement à  $OY$ ; quand  $z$  va de  $+\frac{1}{k}$  à  $+\infty$ ,  $Z$  varie de  $-K$ , parallèlement à  $OX$  en rétrogradant;  $Z$  revient au p.  $+iK'$  (sur  $OY$ ) c'est bien sa valeur pour  $z = +\infty$ .



Le contour décrit par  $Z$  quand  $z$  va de 0 à  $-\infty$  est symétrique du précédent par rapport à  $OY$ , car nous avons remarqué que de  $-1$  à  $-\frac{1}{k}$   $Z$  varie de  $+iK'$ ;  $Z$  se trouve donc en  $+iK'$  pour  $z = -\infty$  comme pour  $z = +\infty$ . Le rectangle ainsi décrit, qui a pour côtés  $2K$ ,  $iK'$ , correspond donc à l'arc des quantités réelles de  $z$ . Nous allons prouver que la surface de ce rectangle correspond d'une manière uniforme au demi-plan des  $y$  positifs.

Et d'abord, on peut prendre l'intégrale de 0 à  $z$  par n'importe quel rectangle représentant le contour du demi-plan, car le point  $+iK'$  correspond au point à l'infini qui limite le demi-plan avec l'axe des  $x$ .



73

chemin contenu dans le demi-plan considéré, puisqu'il ne contient plus aucun point critique: donc  $Z$  est une fonction uniforme de  $z$ , c'à d. qu'à chaque point du demi-plan ne correspond qu'un point du rectangle. Réciproquement,  $z$  est une fonction uniforme de  $Z$  (contenu dans le rectangle) car:  $Z = G(z)$   $G(0) = 0$   
 $G(z)$  étant une fonction holomorphe, et la dérivée:

$$\frac{dz}{dZ} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

ne s'annule en aucun point du demi-plan (de limite comme il a été dit). Il y a donc correspondance uniforme entre  $z$  et  $Z$ . De plus, quand  $z$  reste dans son demi-plan,  $Z$  ne peut sortir du rectangle correspondant: car  $Z$  reste fini même pour  $z$  infini (intégrale d'une forme); donc quand  $z$  décrit le demi-plan,  $Z$  décrit un domaine limité; il atteint un point quelconque  $Z_0$  de sa frontière pour une certaine valeur  $z_0$  de  $z$ ; j'ai dit que  $z_0$  est sur le contour du demi-plan. En effet, la relation  $Z = G(z)$  définit  $z$  comme une fonction holomorphe de  $Z$ , pourvu que  $z$  soit à l'intérieur du demi-plan, et non sur son contour. Donc, si  $z_0$  n'était pas sur ce contour,  $z$  serait holomorphe dans un cercle autour de  $Z_0$ , c'à d. que, pour des valeurs de  $Z$  contenues dans le demi-plan,  $Z$  franchirait la frontière, ce qui est contradictoire. Ainsi la frontière de  $Z$  est la transformée du contour du demi-plan; c'à d. le contour du rectangle; par conséquent  $Z$  ne peut sortir du rectangle. Il ne peut pas non plus y laisser de lacunes, c'à d. que quand  $z$  décrit son demi-plan,  $Z$  décrit tout le rectangle: car on prouverait de même que  $Z$  n'admet pas de frontière intérieure au rectangle. En résumé, à tout point  $z$  du demi-plan correspond un point  $Z$  du rectangle, et réciproquement; on sait déjà qu'il n'en correspond qu'un seul —



On a  $u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$

. 2.

73 bis a



Tout d'abord soit  $z_0$  une valeur quelconque du demi-plan supérieur. (après qu'on a détaché les 4 points critiques par des demi-cercles). Cette valeur de  $z_0$  est donc nécessairement différente des points critiques. Donc la dérivée de l'intégrale par rapport à  $z$  n'est pour ce point ni nulle ni infinie.

La valeur correspondante de  $u$  est déterminée, puisque les points critiques sont détachés du domaine. Appelons-la  $u_0$ .

Le théorème des fonctions implicites nous apprend alors que la relation écrite ci-dessus définit une fonction  $z$  de  $u$  qui pour  $u = u_0$  se réduit à  $z_0$  et qui est holomorphe dans le voisinage de  $u_0$ . Ceci arrivera donc toujours toutes les fois que  $z_0$  n'aura pas été pris sur la limite du demi-plan.

Ceci joint, quand  $z$  décrit tout le demi-plan,  $u$  décrit un certain domaine, inconnu, et à chaque valeur de  $z$  correspond une seule valeur de  $u$  dans ce domaine. Ce domaine est nécessairement limité, puisque  $u$  est toujours finie, en qualité d'intégrale de première espèce.

Il a donc une certaine frontière, qui est nécessairement formée par une ligne continue. (ou plusieurs), et  $u$  atteindra forcément un point quelconque  $u_0$  de cette frontière pour une valeur déterminée de  $z = z_0$ . Or puisque  $z_0$  est nécessairement sur le contour du demi-plan. Car dans le cas contraire, la fonction  $z$  de  $u$  qui se réduit à  $z_0$  pour  $u = u_0$  serait holomorphe dans le voisinage de  $u_0$  et par suite développable en série dans le voisinage de ce point.

Donc elle entrerait de part et d'autre de la frontière, autrement dit  $u$  pourrait franchir cette frontière, ce qui est contradictoire. La frontière de  $u$  n'est donc autre chose que la ligne décrite par  $u$  quand  $z$  décrit le contour du demi-plan, et c.à.d. le contour du rectangle. Le domaine de  $u$  est donc formé entièrement et uniquement par le rectangle.

(91)



7360 5



73 bis c



73 bis d



On a vu (1<sup>er</sup> cahier, page 107) qu'on peut représenter un demi-plan par un cercle; l'intégrale elliptique fournit donc la solution de ce problème: Trouver une représentation conforme entre un rectangle et un cercle.

Le demi-plan inférieur à  $Ox$ , limité par les demi-cercles inférieurs décrits autour des 4 points critiques, contenant des valeurs de  $z$  symétriques de celles que contient le demi-plan supérieur, sera représenté par un 2<sup>e</sup> rectangle symétrique du précédent par rapport à  $Ox$ . Ainsi tout le plan  $z$ , à l'exception des 4 points critiques, est représentée, au moyen de la transformation définie par l'intégrale elliptique, par un rectangle ayant pour centre, dans le plan  $Z$ , l'origine  $O$  et pour côtés  $2K$ ,  $2iK'$ .

Pour représenter toutes les valeurs distinctes de  $z$ , (nous entendrons par valeurs distinctes celles qui ne diffèrent pas de multiples exacts des périodes  $4K$ ,  $2iK'$ ) il faut tenir compte des 2 formules générales:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 + u$$

$$\text{et: } m_1 u_1 + m_2 u_2 + 2K - u$$

Soit  $u$  de 0 en  $z$  en entourant le point  $+1$ , cela revient à décrire le lacet  $+1$  et à aller de 0 en  $z$  avec un radical changé de signe; au lieu de  $u$ , l'intégrale prend la valeur  $2K - u$ .  $z$  étant la fonction uniforme définie ci-dessus dans les 2 demi-plans, on trouve ainsi la nouvelle détermination  $(2K - z)$  de la fonction, également uniforme dans le plan des  $z$ , elle décrira un rectangle égal au précédent, mais avancé de  $2K$  dans le sens des  $x$  positifs; ce nouveau rectangle, qui contiendra toutes les valeurs de la nouvelle fonction, sera donc contigu au premier. Toutes les valeurs distinctes de  $z$  seront contenues dans ces 2 rectangles, c'est-à-dire dans le rectangle total de côtés  $4K$ ,  $2iK'$ . En effet toutes les



75

valeurs possibles de  $Z$ , pour une valeur déterminée de  $z$ , diffèrent des  $2$  valeurs:  $u$ ,  $2K-u$ , de multiples entiers de  $2K$ ,  $2iK'$ , c'est-à-dire se trouvent répartis aux intersections d'un réseau de paraboles aux axes ayant pour équations ( $Z_1 = X_1 + iY_1$  étant ds le rectangle des périodes):

$$X = X_1 + 4mK$$

$$Y = Y_1 + 2nK'$$

Si l'on partage le plan  $Z$  en une infinité de rectangles égaux au rectangle des périodes, et contigus, chacun de ces rectangles contiendra toutes les valeurs distinctes de  $Z$ , et à chaque valeur de  $z$  correspondront dans chaque rectangle  $2$  valeurs de  $Z$ , ayant la même disposition dans tout; d'ailleurs, la  $2$ e valeur:  $2K - Z$ , s'obtient en prenant dans le 1er demi-rectangle ( $2K$ ,  $2iK'$ ) la symétrique de  $Z$  par rapport à son centre  $O$ , et en lui ajoutant  $2K$ : c'est-à-dire que ces  $2$  valeurs sont elles-mêmes symétriques par rapport au centre ( $+K$  dans la figure) du rectangle des périodes. À une valeur quelconque de  $Z$ , prise dans tout le plan, ne correspond au contraire qu'une seule valeur de  $z$ ; donc  $z$  est une fonction uniforme de  $Z$ :

$$z = \lambda(Z)$$

Cette fonction est bien déterminée dans tout le plan, et n'a quedes pôles. Soit on prend un point  $Z$  qui ne correspond à aucun des points critiques  $\pm 1$ ,  $\pm \frac{1}{k}$ , ni à  $z = \infty$ , c'est-à-dire qui ne soit ni un sommet du petit rectangle primitif ( $2K$ ,  $iK'$ ) ni le milieu de son côté supérieur ( $+iK'$ ) la fonction  $z$  sera holomorphe au voisinage de ce point. Reste à savoir si elle est encore holomorphe au voisinage des points critiques que nous venons d'énumérer. Or au point  $Z = +K$ , correspond le point  $z = +1$ ; la dérivée:

$$\frac{dz}{dZ} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$



devient nulle, et le théorème ne peut plus s'appliquer. Mais si l'on fait le changement de variable:

$$z = 1 + z'^2$$

$$dz = \frac{2z' dz'}{z' \sqrt{-(1+z)(1-k^2 z^2)}} = \frac{2dz'}{\sqrt{-(2+z'^2)(1-k^2 z'^2)}}$$

on voit que la dérivée est finie pour le point  $z'=0$  qui correspond au p.  $z=1$ ; donc la fonction  $z$  est holomorphe au point  $K$ .

On raisonne de même pour les autres points critiques. Quant au point  $z=\infty$ , on fait le changement de variable:  $z = \frac{1}{z'}$ , et on trouve que la dérivée est finie pour  $z'=0$ , ou  $z=\infty$ .

Dans tous les cas, la fonction  $z$  est développable en série de Taylor; au voisinage du point  $iK'$ ,  $z'$  est développable, et s'annule pour ce point; c'est donc un pôle de la fonction  $z$ . Cette fonction n'a donc que des pôles dans le plan, et ces pôles sont donnés par les 2 formules:

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 + \frac{iK'}{2K - iK'}$$

on pourrait aussi bien écrire:  $2K + iK'$ , cela revient à ajouter la période  $2iK'$ . Les pôles se trouvent à l'intersection des parallèles aux axes définies par les équations:  $X = 2mK$   $Y = (2n+1)K'$

Il n'y a donc que 2 pôles distincts:  $+iK'$ ,  $2K + iK'$ , qui se répètent indéfiniment dans chaque rectangle du plan  $Z$ .

Nous venons de faire l'inversion de la fonction elliptique:

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

La fonction inverse:  $z = \lambda(u)$  admet 2 pôles distincts:

$iK'$ ,  $2K + iK'$   
dans chaque rectangle des périodes.



Elle prend des valeurs égales, en chaque rectangle, en 2 points quelconques symétriques par rapport au centre du rectangle:

$$\lambda(2K-u) = \lambda(u)$$

De plus, c'est une fonction impaire, car elle change de signe avec  $u$  en gardant la même valeur absolue:

$$\lambda(-u) = -\lambda(u)$$

Donc:

$$\lambda(2K+u) = \lambda(-u) = -\lambda(u)$$

càd: quand on ajoute à  $u$  une demi-période réelle, la fonction  $\lambda$  change de signe.

Revenons à l'intégrale de 0 à un pt  $x$  situé sur l'axe réel, au delà du point  $\frac{1}{k}$ , en évitant les 2 points critiques par des demi-cercles supérieurs:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

On sait que cette intégrale se compose de  $K$ , de  $iK'$ , et de l'intégrale:

$$\int_{\frac{1}{k}}^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} - \int_x^{\infty} = -K + \int_x^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}$$

Donc:  $u = iK' + \int_x^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}$

Posons:  $x = \frac{1}{ky}$ : la dernière intégrale devient:

$$\int_y^{\infty} \frac{-\frac{1}{k} \frac{dy}{y^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{k^2 y^2} - 1\right) \left(\frac{1}{y^2} - 1\right)}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}} \quad \text{Donc:}$$

$$u = iK' + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}$$

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}} = u - iK'$$



En faisant l'inversion, si:  $x = \lambda(u)$ ,  $y = \lambda/u - iK'$

Or:  $x = \frac{1}{ky}$   $y = \frac{1}{kx}$  Donc:  $\lambda(u - iK') = \frac{1}{k\lambda(u)}$

ou, en ajoutant  $2iK'$  à  $u$ :  $\lambda(u + iK') = \frac{1}{k\lambda(u)}$

Cherchons maintenant le résidu de la fonction  $\lambda$  pour chacun de ses pôles. — Pour le pôle  $iK'$ , En général, le résidu relatif d'un pôle simple  $a$  d'une fonction  $f(z)$  est:  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)$  puisque c'est le coefficient  $A$  dans le développement:

$$f(z) = \frac{A}{z-a} + B + C(z-a) + \dots$$

Donc, pour le pôle  $iK'$ , le résidu de  $\lambda$  est:  $\lim_{u \rightarrow iK'} \lambda(u)(u - iK')$  pour  $u = iK'$ . Or cette expression prend la forme indéterminée  $\infty \times 0$ .

Posons:  $u = iK' + \varepsilon$ ; on a:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda(iK' + \varepsilon) \varepsilon$

En vertu de la formule précédente, c'est:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{k\lambda(\varepsilon)}$

Or:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\lambda(\varepsilon)} = \frac{1}{\lambda'(0)}$

$\lambda'(0) = 1$

Donc le résidu est:  $\frac{1}{k}$ .

$$\frac{dz}{dZ} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

Pour le 2<sup>e</sup> pôle:  $2K + iK'$ , on doit chercher:  $\lim_{u \rightarrow 2K + iK'} \lambda(u)(u - 2K - iK')$

Posons:  $u = 2K + iK' + \varepsilon$   $\lambda(2K + iK' + \varepsilon) \varepsilon = -\lambda(iK' + \varepsilon) \varepsilon$

C'est la même expression changée de signe; le résidu est donc  $-\frac{1}{k}$ .  
Si les 2 résidus sont égaux et de signes contraires, comme on pouvait s'y attendre.

La fonction  $\lambda(u)$ , uniforme dans tout le plan et n'ayant que



des pôles, peut, en vertu du théorème de Weierstrass (1<sup>er</sup> cahier, page 133) se mettre sous la forme:

$$\frac{G_1(u)}{G(u)} = \lambda(u)$$

$G$  et  $G_1$  étant des fonctions entières sans racines communes.

Nous allons obtenir une fonction  $G(u)$  remplissant cette condition. Cette fonction doit avoir pour racines les pôles de  $\lambda(u)$ , afin que

$G(u)\lambda(u)$  n'ait plus aucune discontinuité, et soit une fonction entière:  $G_1(u)$ . On peut trouver une telle fonction  $G(u)$  au moyen de  $\lambda(u)$ .

Considérons l'intégrale:  $\int_0^u \lambda^2(u) du$

C'est une fonction uniforme de  $u$ .

En effet,  $\lambda^2(u)$  est doublement périodique, mais ses périodes sont  $2K$ ,  $2iK'$ : car elle a la même valeur quel que soit le signe de  $\lambda(u)$ . Elle n'a qu'un pôle distinct, à savoir  $iK'$ , puisqu'elle a les mêmes pôles que  $\lambda(u)$ , et qu'elle se trouve dans un autre rectangle des périodes. C'est d'ailleurs un pôle double, puisque  $\lambda(u)$  est élevé au carré; il en résulte que le résidu de  $\lambda^2(u)$  relatif à ce pôle sera nul.

Considérons en effet:  $\lambda(\varepsilon + iK') = \frac{1}{K\lambda(\varepsilon)}$

$\lambda(\varepsilon)$  est une fonction impaire, donc:

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon + \alpha\varepsilon^3 + \beta\varepsilon^5 + \dots$$

$$\lambda(\varepsilon + iK') = \frac{1}{K\varepsilon(1 + \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^4 + \dots)}$$

Il y aura donc que des termes pairs dans le développement de  $\lambda^2(\varepsilon + iK')$



et le 1<sup>er</sup> sera:  $\frac{1}{k^2 \varepsilon^2}$ . Le résidu sera donc nul, puisqu'il n'y a pas de terme en  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Il n'y aura donc pas de terme logarithmique dans l'intégrale, et celle-ci n'aura pas de pôle.

Intégrons encore une fois:

$$\int^u \int^u \lambda^2(u) du$$

Cette nouvelle intégrale n'est plus uniforme, car en intégrant le 1<sup>er</sup> terme, on aura:  $-\frac{1}{k^2 \varepsilon}$  qui donne le résidu:  $-\frac{1}{k^2}$ .

Si on cette nouvelle intégrale admet le pôle  $iK'$  comme  $\lambda^2(u)$ .

En intégrant ~~encore~~ <sup>la 2<sup>e</sup> fois</sup>, on trouve:  $-\frac{1}{k^2} \log \varepsilon = -\frac{1}{k^2} \log(u - iK')$  qui devient infini pour  $u = iK'$ . Telle est la partie qui est discontinue au pôle  $iK'$ . Multiplions par  $-k^2$  pour détruire le coefficient, et faisons de cette expression l'exposant de  $e$ , nous aurons:

$$e^{-k^2 \int^u \int^u \lambda^2(u) du} = e^{\log(u - iK')} \cdot e^{P(u)} \\ = (u - iK') e^{P(u)}$$

$P$  étant une fonction holomorphe. Cette exponentielle s'annule donc pour  $u = iK'$ , et est holomorphe dans tout le plan: posons:

$$G(u) = e^{-k^2 \int^u \int^u \lambda^2(u) du}$$

Cette fonction  $G(u)$  est entière, et a pour racines les pôles de  $\lambda^2(u)$ , qui se déduisent du 1<sup>er</sup> par la formule:  $iK' + 2mK + 2niK'$  c'est-à-dire tous les pôles de  $\lambda(u)$ . Cette fonction ne diffère que par une exponentielle des fonctions  $\theta$  étudiées par Abel et Jacobi.

Preons sa dérivée logarithmique:  $\frac{G'(u)}{G(u)} = -k^2 \int^u \lambda^2(u) du$



On aurait de même:

$$\frac{G'(u+2K)}{G(u+2K)} = -k^2 \int_0^{u+2K} \lambda^2(u) du$$

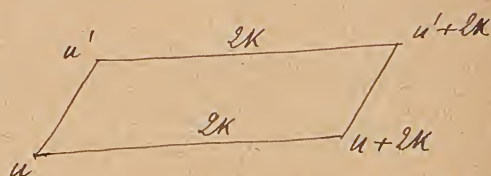
Donc:

$$\frac{G'(u+2K)}{G(u+2K)} - \frac{G'(u)}{G(u)} = -k^2 \int_u^{u+2K} \lambda^2(u) du$$

Le 2<sup>e</sup> membre est constant, parce que  $2K$  est la période réelle de  $\lambda^2(u)$ . En effet, on a identiquement:

$$\int_u^{u+2K} \lambda^2(u) du = \int_{u'}^{u'+2K} \lambda^2(u) du$$

car l'intégrale prise le long du parallélogramme  $(u, u', u'+2K, u+2K)$  est nulle, le résidu relatif au pôle étant nul; or les intégrales prises de  $u$  à  $u'$  et de  $(u+2K)$  à  $(u'+2K)$  sont égales, les valeurs de  $u$  étant identiques sur les 2 lignes; donc les intégrales prises suivant les côtés  $2K$  sont égales. On peut donc écrire:



identiques sur les 2 lignes; donc les intégrales prises suivant les côtés  $2K$  sont égales. On peut donc

$$\frac{G'(u+2K)}{G(u+2K)} - \frac{G'(u)}{G(u)} = H$$

en posant:

$$H = -k^2 \int_u^{u+2K} \lambda^2(u) du = \text{const.}$$

Intégrons:

$$\log G(u+2K) - \log G(u) = Hu + H'$$

$H'$  étant une 2<sup>e</sup> constante; ou, en passant aux nombres

$$G(u+2K) = G(u) e^{Hu + H'}$$

Ainsi la fonction entière  $G$  se reproduit après la période  $2K$  multipliée par une exponentielle linéaire en  $u$ . La même conclusion s'applique à la période imaginaire  $2iK'$  de  $\lambda^2(u)$ , puisque les raisonnements précédents s'appliquent à la périodicité; on a donc aussi:

$$G(u+2iK') = G(u) e^{H_1 u + H'_1}$$



On est ainsi ramené à étudier les fonctions entières ~~finies~~  
 $G(u)$ .

On peut généraliser quelques-uns des résultats précédents et les étendre sans difficulté au cas d'une ~~polynôme~~ intégrale elliptique quelconque, non mise sous forme canonique, c'est-à-dire sans le radical carré, non un trinôme bicarré, mais un polynôme général du 4<sup>e</sup> degré:  $u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E}}$ .

La fonction inverse, que nous appellerons encore:  $z = \lambda(u)$  est doublement périodique, et a 2 pôles dans chaque parallélogramme des périodes. On peut écrire:  $\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E$

Soient  $\alpha, \beta$  les 2 pôles distincts; au voisinage de  $\alpha$ ,  $z$  peut se mettre sous la forme:  $z = \frac{a}{u-\alpha} + b + c(u-\alpha) + \dots = \lambda(u)$

Donc:  $\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \left[-\frac{a}{(u-\alpha)^2} + c + \dots\right]^2 =$

$$A\left[\frac{a}{u-\alpha} + b + c(u-\alpha) + \dots\right]^4 + B\left[\frac{a}{u-\alpha} + b + \dots\right]^3 + C\left[\frac{a}{u-\alpha} + b + \dots\right]^2 + D\left[\frac{a}{u-\alpha} + \dots\right] + E$$

Égalons les coefficients de  $\frac{1}{(u-\alpha)^4}$  dans les 2 développements:

$$a^2 = Aa^4 \quad \text{ou:} \quad Aa^2 = 1 \quad \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Tel est le résidu relatif au pôle  $\alpha$ ; les résidus relatifs aux 2 pôles étant égaux et de signes contraires, on a aussi les 2 résidus de la fonction  $\lambda(u)$ , seulement on ne sait aucun des



2 pôles affecter chacun d'eux. Egalons encore les coefficients des termes en  $\frac{1}{(u-\alpha)^3}$  :  $0 = 4Aa^3b + Ba^3$   $b = -\frac{B}{4A}$

Le terme  $b$  est ainsi déterminé, et on voit qu'il est le même pour les 2 pôles.

On peut étendre à ce cas général la représentation de la fonction entière  $G(u)$  par une exponentielle. Cherchons 2 coefficients constants  $P, Q$ , tels que :

$$\int_0^u [P\lambda^2(u) + Q\lambda(u)] du$$

soit une fonction uniforme et que :

$$e^{\int_0^u [P\lambda^2(u) + Q\lambda(u)] du}$$

Soit une fonction entière  $G(u)$ . Or on peut trouver  $P, Q$  en fonction de  $a, b$ . Pour le pôle  $\alpha$ , par exemple,  $a$  a une de ses 2 déterminations ; il faut que la fonction :  $[P\lambda^2(u) + Q\lambda(u)]$  n'ait pas de résidu relatif à ce pôle ; développons-la :

$$P\left[\frac{a}{u-\alpha} + b + c(u-\alpha) + \dots\right]^2 + Q\left[\frac{a}{u-\alpha} + b + c(u-\alpha) + \dots\right]$$

Le coefficient de  $\frac{1}{u-\alpha}$  dans ce développement doit être nul ;

donc :  $2Pab + Qa = 0$   $2Pb + Q = 0$   $\frac{P}{Q} = \frac{2A}{B}$

Ce résultat est dû à ce que  $b$  est entièrement connu.

La 1<sup>re</sup> intégrale n'aura donc pas de résidu. Mais le terme :  $\frac{Pa^2}{(u-\alpha)^2}$  donne ds cette intégrale :

qui donne à son tour dans la 2<sup>e</sup> :

$$-\frac{Pa^2}{u-\alpha} - Pa^2 \log(u-\alpha)$$

Pour réduire à l'unité ce coefficient :  $-Pa^2 = 1$ ,



il faudra prendre  $P = -\frac{1}{a^2}$ .

$P$  est ~~seulement~~ déterminé; car, si la valeur de  $a$  pour chaque pôle est ambiguë,  $a^2$  est parfaitement déterminé; connaissant  $P$ , on connaîtra  $Q$ . On aura donc la même combinaison analytique donnant une fonction  $G(u)$  holomorphe dans tout le plan et ayant pour racines les pôles de la fonction  $z = \lambda(u)$ .



## Théorie des équations différentielles.

Nous établirons d'abord un théorème fondamental touchant l'existence de l'intégrale d'une équation différentielle ordinaire du 1<sup>er</sup> ordre:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

On s'est souvent contenté d'en donner une démonstration intuitive au moyen d'une construction géométrique. Dans un système de coordonnées rectangulaires, <sup>plans</sup> on considère le point initial  $(x_0, y_0)$ ; on subdivise l'intervalle  $(x_0, X)$  en intervalles suffisamment petits  $\Delta x$  (égaux ou inégaux). On prend d'abord:

$$\Delta y_1 = f(x_0, y_0) \Delta x_1 \quad \text{et on pose: } x_1 = x_0 + \Delta x_1, \quad y_1 = y_0 + \Delta y_1$$

On a ainsi un  $p_1 (x_1, y_1)$  voisin du  $p_0 (x_0, y_0)$ . On prend ensuite:

$$\Delta y_2 = f(x_1, y_1) \Delta x_2 \quad \text{et on pose: } x_2 = x_1 + \Delta x_2, \quad y_2 = y_1 + \Delta y_2$$

On a un nouveau point  $(x_2, y_2)$  voisin des  $p_1 (x_1, y_1)$  et ainsi de suite; on obtient finalement pour  $X$  une valeur  $Y$  de  $y$ , et on a une suite de points de  $(x_0, y_0)$  à  $(X, Y)$ . Si l'on fait décroître indéfiniment les intervalles  $\Delta x$ , les intervalles  $\Delta y$  décroissent indéfiniment, et la suite des points intercalés entre  $(x_0, y_0)$  et  $(X, Y)$ , dont le nombre tend vers l'infini, a pour limite un arc de courbe qui représente dans l'intervalle  $(x_0, X)$  la fonction  $y$  de  $x$  définie par l'équation différentielle; de sorte que la valeur finale  $Y$  est bien déterminée.

La démonstration suivante, qui est due à Cauchy, consiste à mettre sous une forme analytique rigoureuse les considérations géométriques que nous venons d'exposer:



Dans le cas où  $y$  ne figure pas dans l'équation différentielle, on a simplement:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

et on obtient  $y$  par une quadrature. Pour le démontrer, on subdivise l'intervalle  $(x_0, X)$  par les points intermédiaires  $x_1, x_2, \dots$  sur  $Ox$ ; les valeurs correspondantes  $y_0, y_1, \dots, Y$  de  $y$  sont données de proche en proche par les formules:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0) \quad y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) f(x_1) \dots \text{etc}$$

de sorte qu'on a finalement, en ajoutant ces égalités:

$$Y - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

Quand on fait tendre tous les intervalles vers 0 et leur nombre vers l'infini, cette somme tend vers une limite fixe qui est par définition l'intégrale définie:

$$\int_{x_0}^X f(x) dx$$

et qui est la solution (à une constante additive près) de l'équation différentielle:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Nous allons suivre la même marche pour établir l'existence de l'intégrale de l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Pour cela, on subdivisera l'intervalle  $(x_0, X)$  par les points intermédiaires  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ , et on leur fera correspondre les valeurs  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  de  $y$  par les formules successives:

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$$

$$Y - y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})(X - x_{n-1})$$

En ajoutant toutes ces égalités, on en tire la valeur de  $Y$ :



$$Y = \Phi(x_0, y_0, X, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})$$

Il s'agit de montrer que cette fonction  $\Phi$  tend vers une limite déterminée quand les intervalles des  $x$  tendent vers 0, leur nombre tendant vers l'infini.

Nous supposons que  $f(x, y)$  est continue dans le voisinage du point  $(x_0, y_0)$  c'est-à-dire dans le champ défini par les inégalités :

$$x_0 - a < x < x_0 + a$$

$$y_0 - b < y < y_0 + b$$

Cela veut dire que, étant donnée une quantité fixe  $\lambda$ , on pourra trouver un nombre  $\delta$  tel que si l'on a :

$$|\Delta x| < \delta$$

$$|\Delta y| < \delta$$

on ait :

$$|f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \lambda$$

le point  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  étant, ainsi que le p.  $(x, y)$  dans le champ délimité plus haut. La fonction est même, dans ces conditions, uniformément continue dans ce champ.

Nous supposons de plus que si  $y, y'$  sont 2 valeurs comprises dans l'intervalle  $(y_0 - b, y_0 + b)$ , on a :

$$|f(x, y') - f(x, y)| < k(y' - y)$$

$k$  étant une quantité finie. Cela a lieu en particulier si la fonction  $f(x, y)$  a une dérivée partielle par rapport à  $y$ , car alors on a, en vertu du théorème des accroissements finis :

$$f(x, y') - f(x, y) = (y' - y) f'_y(y + \theta(y' - y)) \quad 0 < \theta < 1.$$

On peut remarquer que cette 2<sup>e</sup> hypothèse n'est pas nécessaire dans le cas d'une quadrature, où elle n'aurait pas de sens.

Dans ces conditions, la fonction  $\Phi$  aura une limite, mais pas



dans tout le champ considéré: soit  $M$  le module maximum de  $f(x, y)$  dans ce champ; prenons une quantité fixe  $A$  telle que l'on ait à la fois:  $A \leq \alpha$ ,  $MA \leq b$

et attribuons  $x$  la nouvelle inégalité double

$$x_0 - A < x < x_0 + A$$

(Cette inégalité sera plus restreinte que la première, si  $\alpha > \frac{b}{M}$ .)  
Nous supposons que  $X$ , et par conséquent l'intervalle entre  $(x_0, X)$  tombe entre ces nouvelles bornes du champ. Nous allons montrer que les valeurs  $y_1, y_2, \dots, Y$  se trouvent dans ce même champ, où la fonction  $f$  est définie et continue. — En effet,

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \quad \text{donc: } |y_1 - y_0| < MA < b$$

$$y_2 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$$

$$|y_2 - y_0| < M(x_1 - x_0) + M(x_2 - x_1) = M(x_2 - x_0) < MA < b$$

et ainsi de suite jusqu'à:

$$Y - y_0 < MA < b$$

puisque:  $X - x_0 < A$ .

Cela posé, abordons la démonstration du théorème —

Considérons d'abord une loi de décomposition progressive de l'intervalle  $(x_0, X)$  telle qu'on passe d'un mode de décomposition au suivant en subdivisant les intervalles du premier, de sorte que tous les points de divisions de chaque mode de décomposition subsistent indéfiniment dans les décompositions successives.

Soit un 1<sup>er</sup> mode de décomposition  $(x)$ :  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, X$   
et soit le mode suivant  $(x')$ :  $x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_m, \dots, x'_n, \dots, X$

où:  $x'_m = x_\alpha$ ,  $x'_n = x_{\alpha+1}$ . Entre  $x'_m$  et  $x'_n$  s'inscrivent un certain nombre de nouveaux points de division, comme  $x'_k$  —



89

Nous désignerons par les mêmes indices les valeurs correspondantes de  $y$ , obtenues de proche en proche au moyen des formules connues. Nous cherchons une limite supérieure de la différence entre  $Y$  et  $Y'$ , valeurs finales obtenues par ces 2 modes de décomposition. Pour cela, nous allons établir une inégalité entre la différence des valeurs de  $y$  pour  $x'_n$  et  $x'_{n+1}$ , et la différence des valeurs de  $y$  pour  $x'_m$  et  $x'_\alpha$ : autrement dit, entre:

$$(y'_n - y'_{n+1}) \quad \text{et} \quad (y'_m - y'_\alpha)$$

Or, on a toujours:  $y'_k - y'_m = f(x'_m, y'_m)(x'_k - x'_m)$

d'où:  $|y'_k - y'_m| < M |x'_k - x'_m|$  quel que soit  $K$  entre  $m$  et  $n$

Supposons que l'on ait pris un mode de décomposition  $(n)$  assez avancé dans la suite considérée pour qu'on ait:

$$M |x'_{n+1} - x'_n| < \delta$$

Ce qui est toujours possible, puisque  $\lambda$  étant donné à l'avance, on lui fait correspondre une quantité fixe  $\delta$ . On aura donc quel que soit  $K$ :

$$|y'_k - y'_m| < \delta$$

en même temps que:

$$|f(x'_k, y'_k) - f(x'_m, y'_m)| < \lambda$$

en vertu de la continuité

On a les formules:

$$y'_{m+1} - y'_m = (x'_{m+1} - x'_m) f(x'_m, y'_m)$$

$$y'_{m+2} - y'_{m+1} = (x'_{m+2} - x'_{m+1}) f(x'_{m+1}, y'_{m+1})$$

$$y'_n - y'_{n-1} = (x'_n - x'_{n-1}) f(x'_{n-1}, y'_{n-1})$$

Ajoutons:

$$y'_n - y'_m = (x'_n - x'_m) [f(x'_m, y'_m) + \theta \lambda]$$

$$0 < \theta < 1.$$



car en remplaçant  $f(x'_{n+1}, y'_{n+1}) \dots \dots \dots f(x'_{n-1}, y'_{n-1})$   
 par  $f(x'_n, y'_n)$  on commet chaque fois une erreur moindre que  $\lambda$ .  
 Rapprochons les égalités correspondant aux 2 modes de décomposition:

$$y_{\alpha+1} - y_{\alpha} = (x_{\alpha+1} - x_{\alpha}) f(x_{\alpha}, y_{\alpha})$$

$$y'_n - y'_m = (x_{\alpha+1} - x_{\alpha}) [f(x'_m, y'_m) + \theta \lambda]$$

$$y'_n - y_{\alpha+1} = y'_m - y_{\alpha} + (x_{\alpha+1} - x_{\alpha}) [f(x_{\alpha}, y'_m) - f(x_{\alpha}, y_{\alpha}) + \theta \lambda]$$

ce qui donne, en vertu de notre 2<sup>e</sup> hypothèse:

$$|y'_n - y_{\alpha+1}| \leq |y'_m - y_{\alpha}| + |x_{\alpha+1} - x_{\alpha}| [k |y'_m - y_{\alpha}| + \lambda]$$

Telle est l'inégalité cherchée entre  $(y'_n - y_{\alpha+1})$  et  $(y'_m - y_{\alpha})$  —  
 Or on a à l'origine de l'intervalle  $y'_0 = y_0$ ; on peut donc  
 comparer de proche en proche  $y$  et  $y'$  en tous les points de division  
 du 1<sup>er</sup> mode  $(x)$  — Cherchons d'abord à mettre sous une forme  
 simple l'inégalité que nous venons de trouver.

Si l'on avait une suite:  $V_0, V_1, V_2, \dots \dots \dots$  où  $V_0 = 0$ ,  
 définie par la relation récurrente:  $V_{\alpha+1} = V_{\alpha} + |x_{\alpha+1} - x_{\alpha}| [k V_{\alpha} + \lambda]$   
 chaque différence:  $(y'_n - y_{\alpha+1})$  serait plus petite que le terme  
 correspondant de cette suite:  $V_{\alpha+1}$ .  
 Cherchons donc une expression simple de  $V_{\alpha+1}$ :

$$\left(V_{\alpha+1} + \frac{\lambda}{k}\right) = \left(V_{\alpha} + \frac{\lambda}{k}\right) + k |x_{\alpha+1} - x_{\alpha}| \left[V_{\alpha} + \frac{\lambda}{k}\right]$$

$$\text{ou: } \left(V_{\alpha+1} + \frac{\lambda}{k}\right) = \left(V_{\alpha} + \frac{\lambda}{k}\right) [1 + k(x_{\alpha+1} - x_{\alpha})]$$

$$\text{Comme: } V_0 = 0, \quad V_1 = \frac{\lambda}{k} [1 + k(x_1 - x_0)] \quad \text{et généralement:}$$



$$V_{\alpha+1} + \frac{\lambda}{k} = \frac{\lambda}{k} (1 + k(x_1 - x_0)) (1 + k(x_2 - x_1)) \dots (1 + k(x_{\alpha+1} - x_\alpha))$$

Or:  $1 + k\alpha < e^{k\alpha}$ . On peut donc écrire:

$$V_{\alpha+1} + \frac{\lambda}{k} < \frac{\lambda}{k} e^{k|x_{\alpha+1} - x_0|} \quad V_{\alpha+1} < \frac{\lambda}{k} \left[ e^{k|x_{\alpha+1} - x_0|} - 1 \right]$$

On a donc enfin:  $|y'_n - y_{\alpha+1}| < \frac{\lambda}{k} \left[ e^{k|x_{\alpha+1} - x_0|} - 1 \right]$

et en particulier, pour les valeurs finales de  $y, y'$ :

$$|Y' - Y| < \frac{\lambda}{k} \left[ e^{k|X - x_0|} - 1 \right]$$

Or  $Y'$  représente la valeur trouvée pour  $y$  correspondante à  $X$  dans un mode de décomposition comprenant les mêmes points de division que le mode  $(x)$ ; le résultat précédent est donc valable pour tous les modes de décomposition qui suivent celui-là; donc:

Pour tous les modes successifs de décomposition à partir de celui où:

$$|x_{\alpha+1} - x_\alpha| < \delta \quad |y_{\alpha+1} - y_\alpha| < \delta \quad \delta \text{ correspondant à } x,$$

la valeur finale trouvée pour  $y$  oscille dans un intervalle:

$$\text{de } Y - \frac{\lambda}{k} \left[ e^{k|X - x_0|} - 1 \right] \quad \text{à} \quad Y + \frac{\lambda}{k} \left[ e^{k|X - x_0|} - 1 \right]$$

Comme la quantité entre crochets est finie et fixe, et que l'on peut prendre  $\lambda$  aussi petit qu'on veut, on voit que la valeur finale de  $y$ , quand les intervalles tendent vers 0, tend vers une limite déterminée.

Ce que nous venons de dire s'applique à une suite de décompositions obtenues en subdivisant indéfiniment les intervalles déjà obtenus.

Pour que nos conclusions soient générales, il nous faut maintenant



considérer 2 modes de décomposition quelconques  $(x)$   $(x')$  qui peuvent n'avoir aucun point de division commun. Pour les comparer, prenons un 3<sup>e</sup> mode de décomposition  $(x'')$  comprenant tous les points de division des 2 premiers; il pourra être considéré comme obtenu en subdivisant, soit les intervalles de  $(x')$ , soit ceux de  $(x)$ . En lui appliquant, dans ces 2 hypothèses, le résultat précédent, on peut écrire :

$$|Y'' - Y'| < \frac{\lambda}{k} \left[ e^{k(x-x_0)} - 1 \right] \quad |Y'' - Y| < \frac{\lambda}{k} \left[ e^{k(x-x_0)} - 1 \right]$$

en supposant que les intervalles de  $(x)$  et  $(x')$  soient tous plus petits que  $\delta$ . On en conclut :

$$|Y' - Y| < 2 \frac{\lambda}{k} \left[ e^{k(x-x_0)} - 1 \right]$$

Ainsi la différence entre les valeurs finales de  $y$  obtenues par 2 modes de décomposition quelconques peut être rendue aussi petite qu'on veut, pourvu que les intervalles de ces 2 modes soient suffisamment petits; c'est-à-dire que ces valeurs tendent vers une même limite quand les intervalles tendent vers 0.

Ainsi, quelle que soit la loi de décomposition de l'intervalle  $(x_0 X)$  on trouve pour  $y$  la même valeur  $Y$  correspondant à  $X$ , quand on fait tendre les intervalles vers 0 et leur nombre vers l'infini; cette valeur se réduit à  $y_0$  pour  $X = x_0$ , c'est-à-dire que c'est une fonction continue et uniforme de  $x$  dans l'intervalle  $(x_0 X)$ .

Il reste à prouver que cette fonction  $y$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Prenons une valeur  $x' > x$ , en supposant :  $|x' - x| < \delta$ . Soit  $y$  la valeur de la fonction en  $x$ ,  $y'$  sa valeur en  $x'$ .



Si l'on opère sur l'intervalle  $(x, x')$  par subdivisions successives indéfinies, en partant de la valeur  $y$  en  $x$ , on trouve à la limite  $y'$  en  $x'$  - Si au contraire on ne fractionne pas l'intervalle  $(x, x')$  on trouvera une valeur  $Y'$  différente de  $y'$ , par la formule:

$$Y' - y = f(x, y)(x' - x)$$

$Y'$  et  $y'$  sont les résultats de 2 modes de décomposition de l'intervalle  $(x, x')$  dont l'un n'a aucun point de division, et l'autre une infinité - On peut leur appliquer le théorème, et écrire l'inégalité:

$$|Y' - y'| < \frac{\lambda}{k} \left[ e^{k(x' - x)} - 1 \right] \quad \text{ou:} \quad Y' - y' = \theta \frac{\lambda}{k} \left[ e^{k(x' - x)} - 1 \right]$$

Des 2 dernières égalités on conclut:

$$y' - y = (x' - x) f(x, y) - \theta \frac{\lambda}{k} \left[ e^{k(x' - x)} - 1 \right] \quad \text{ou:}$$

$$\frac{y' - y}{x' - x} = f(x, y) - \frac{\theta \lambda}{k} \frac{e^{k(x' - x)} - 1}{x' - x}$$

Si l'on fait tendre  $\lambda$  vers 0, & divise indéfiniment, et l'intervalle  $(x' - x)$  tend vers 0: or

$$\frac{e^{k(x' - x)} - 1}{x' - x}$$

reste fini pour  $x' = x$ ; donc

le dernier terme tendra vers 0 avec  $\lambda$ . D'autre part,  $\frac{y' - y}{x' - x}$

tendra vers  $\frac{dy}{dx}$ ; on aura donc:  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

L'équation différentielle est donc vérifiée par la fonction  $y$  que nous venons de définir.

Cette intégrale de l'équation différentielle est définie et continue dans l'intervalle:  $(x_0 - A, x_0 + A)$

Nous allons prouver de plus qu'elle est unique. Supposons en effet



94  
qu'il y ait une seconde solution de l'équation différentielle; on pourrait toujours la mettre sous la forme d'une somme:

$y + u$  où  $u$  est une fonction (non constante) de  $x$ . On aurait à la fois, par hypothèse:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dx} = f(x, y + u) \quad \text{D'où:}$$

$$\frac{du}{dx} = f(x, y + u) - f(x, y) = u \cdot \frac{f(x, y + u) - f(x, y)}{u} = u \varphi(x)$$

$\varphi(x)$  étant une fonction qui reste inférieure en valeur absolue au nombre  $k$  qui figure dans l'inégalité:

$$|f(x, y + u) - f(x, y)| < k u$$

et continue, sauf peut-être pour les valeurs de  $x$  où  $u$  s'annule.

On a: 
$$\frac{du}{u} = \varphi(x) dx$$

Intégrons, en partant du point  $x_1$ , jusqu'à une valeur quelconque de  $x$  entre  $x_1$  et  $x_0$ : 
$$\log \frac{u}{u_1} = \int_{x_1}^x \varphi(x) dx$$

Nous supposons que  $u$  n'est pas identiquement nulle, sans quoi le théorème serait démontré. Prenons donc un point  $x_1$  voisin de  $x_0$ , et où  $u_1 \neq 0$  ( $u = 0$  pour  $x = x_0$ , puisque les intégrales doivent y prendre la même valeur  $y_0$ ). Si entre  $x_1$  et  $x_0$   $u$  s'annule, en  $\xi$  par exemple, intégrons de  $x_1$  à  $\xi$ :

$\log \frac{u}{u_1}$  devient infini, tandis que l'intégrale du second membre reste finie; l'égalité est donc impossible. Admettons

donc que  $u$  ne s'annule pas entre  $x_1$  et  $x_0$ , et intégrons de  $x_1$  à  $x_0$ ;  $\log \frac{u_0}{u_1}$  est infini, tandis que l'intégrale  $\int_{x_1}^{x_0} \varphi(x) dx$  reste toujours finie; l'égalité est encore impossible; notre hypothèse



95

est donc absurde, et  $u$  est identiquement nulle, ce qui prouve que  $y$  est la seule solution (à une constante près) de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Nous allons donner une seconde démonstration de ce même théorème, en procédant par approximations successives, au lieu de partager l'intervalle en intervalles ~~infinitésimaux~~ <sup>de plus en plus</sup> petits et de déterminer la fonction  $y$  de proche en proche par des différences finies.

Partons encore du système de valeurs  $x_0, y_0$  ; l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y_0)$$

détermine une certaine fonction  $y$  de  $x$ , par une quadrature, à une constante près ; cette fonction  $y$  sera entièrement définie si l'on se donne sa valeur pour  $x = x_0$ , par exemple  $y_0$  :

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx$$

Substituons cette fonction bien déterminée de  $x$  dans l'équation différentielle, qui devient :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y_1)$$

Le membre se dépendant que de  $x$ , on en tire par une nouvelle quadrature une fonction de  $x$  qu'on détermine complètement en faisant qu'elle prenne la valeur  $y_0$  pour  $x = x_0$  :

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx$$

En substituant de même  $y_2$  dans  $f(x, y)$  on déterminerait une nouvelle fonction  $y_3$  en lui assignant la valeur  $y_0 = y_1 = y_2$  pour  $x = x_0$ , et ainsi de suite indéfiniment :

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx$$



On a une suite infinie de fonctions  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  qui prennent toutes la valeur  $y_0$  pour  $x = x_0$ . On va prouver d'abord que lorsque  $n$  augmente indéfiniment, ces fonctions tendent vers une limite qui est une fonction continue de  $x$ ; et ensuite, que celle-ci satisfait à l'équation différentielle:  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Remarquons d'abord que toutes ces fonctions successives, quand  $x$  reste compris dans l'intervalle:  $(x_0 - A, x_0 + A)$  défini plus haut, restent comprises dans l'intervalle  $(y_0 - b, y_0 + b)$ , c'est-à-dire dans le champ où  $f(x, y)$  est connue définie. En effet, on a:

$$|y_1 - y_0| < M|x - x_0| < Ma < b \quad \text{et de même, en}$$

$$\text{général:} \quad |y_n - y_0| < M|x - x_0| < Ma < b$$

Étudions maintenant la loi de décroissance de la différence de 2 fonctions consécutives; posons:  $y_n - y_{n-1} = u_n$ .

$$\text{On a d'abord:} \quad u_1 = \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \quad |u_1| < M|x - x_0|$$

Admettons  $x$  à rester dans l'intervalle  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$   $\delta$  étant inférieur ou égal à  $A$ . On aura:  $|u_1| < M\delta$

$$\text{On a ensuite:} \quad \frac{du_2}{dx} = \frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx} = f(x, y_1) - f(x, y_0)$$

$$\text{Or:} \quad |f(x, y_1) - f(x, y_0)| < k|y_1 - y_0| < ku_1$$

$$\text{Donc, en intégrant:} \quad |u_2| < ku_1|x - x_0| < u_1 \times k\delta < M\delta \cdot k\delta$$

$$\text{On aurait de même:} \quad \left| \frac{du_3}{dx} \right| = |f(x, y_2) - f(x, y_1)| < ku_2$$

$$\text{et en intégrant:} \quad |u_3| < ku_2|x - x_0| < u_2 \times k\delta < M\delta (k\delta)^2$$

$$\text{et ainsi de suite; en général:} \quad |u_n| < M\delta (k\delta)^{n-1}$$



Or on a identiquement:  $y_n = y_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$   
 $y_n$  aura donc une limite si la série:  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$   
 est convergente. Or elle sera sûrement convergente si l'on prend:

$k\delta < 1$ , car tous ses termes seront inférieurs en valeur  
 absolue aux termes correspondants d'une progression géométrique  
 décroissante. Donc  $y_n$  aura une limite si l'on a pris:

$\delta < \frac{1}{k}$ , et cette limite sera une fonction  $y$  de  $x$ ,  
 définie dans l'intervalle:  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

$\delta$  étant soumis aux 3 inégalités:  $\leq a$ ,  $\leq \frac{b}{M}$ ,  $< \frac{1}{k}$ .

On voit que cet intervalle peut être plus restreint que celui que  
 nous avons obtenu par la méthode de Cauchy (1<sup>re</sup> démonstration)  
 et qui n'était soumis qu'aux 2 premières inégalités:

$$A \leq a, \quad A \leq \frac{b}{M}.$$

En revanche, cette seconde démonstration a l'avantage de définir  
 la fonction  $y$  par une série convergente; on voit que cet avantage  
 a été acheté par une restriction de l'intervalle où cette fonction  
 pourrait être définie.

La fonction  $y$  que nous venons de définir est évidemment  
 uniformément continue dans tout intervalle contenu lui-même  
 dans l'intervalle:  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . — Donc on a, pour  $n$

suffisamment grand:  $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$   $|y_{n-1} - y| < \frac{\varepsilon}{2}$

d'où:  $|y_n - y_{n-1}| < \varepsilon$ . Or:  $y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx$

$|f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})| < k|y_n - y_{n-1}| < k\varepsilon$ . Donc:

$|y_n - y_0 - \int_{x_0}^x f(x, y_n) dx| < k\varepsilon|x - x_0| < k\delta\varepsilon$  La limite:  
 est inférieure pour  $n = \infty$ .



98

$$y - y_0 = \int_{x_0}^x f(x, y) dx \quad \text{d'où:} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Ainsi la fonction  $y$  vérifie bien l'équation différentielle, c. q. f. d.

— Nous allons maintenant démontrer le théorème pour le cas de 2 variables complexes. Il semble que ce soit un cas plus général que le précédent, les variables réelles pouvant être considérées comme un cas particulier des variables complexes; en réalité, il est plus particulier, car il faut plus de conditions pour qu'il y ait une intégrale dans le cas de variables imaginaires que dans le cas de valeurs réelles, chaque imaginaire équivalant à 2 variables réelles.

Employons d'abord la méthode de Cauchy: la 1<sup>re</sup> condition est que la fonction  $f(x, y)$  soit holomorphe au voisinage des 2 points  $x_0, y_0$ , c.à.d. dans 2 cercles de rayons respectifs  $a, b$  entourant ces 2 points, chacun dans son plan. La 2<sup>e</sup> condition sera vérifiée si l'on suppose que la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial y}$  soit continue dans les 2 cercles et sur les 2 circonférences (si elle n'était pas continue sur les 2 circonférences on pourrait satisfaire à cette condition en prenant des rayons plus petits, différant de  $a, b$  aussi peu qu'on voudra.) En effet, la différence:

$f(x, y_2) - f(x, y_1)$  a une limite supérieure, car en vertu du théorème des accroissements finis généralisé (étendu par M. Darboux aux variables imaginaires) on a l'égalité:

$$f(x_2) - f(x_1) = \lambda (x_2 - x_1) f'_x(x, y_1 + \theta(x_2 - x_1)) \quad \begin{matrix} |\lambda| < 1 \\ 0 < 1 \end{matrix}$$

$$\text{Donc: } |f(x, y_2) - f(x, y_1)| < (y_2 - y_1) f'_y(x, y_1 + \theta(y_2 - y_1)) < k(y_2 - y_1)$$

$k$  étant par ex. le maximum de  $f'_y$  dans les 2 cercles, y compris leurs circonférences.



29

Cela posé, parcourons un rayon du cercle  $x_0$  à partir du centre; la fonction  $f(x, y)$  et sa dérivée sont continues sur ce rayon. Allons jusqu'à un point quelconque  $x$  de ce rayon, et fractionnons le segment  $(x_0, x)$  en éléments; on ~~aura~~<sup>fera</sup> comme précédemment:

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)$$

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)$$

$$\dots \dots \dots y_n - y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

et l'on démontrera comme ci-dessus que l'on obtient une valeur bien déterminée de  $y$  en  $x$ , pourvu que  $|x|$  soit compris dans l'intervalle:  $|x_0|, |x_0| + |A|$   $|A| < a, |A| < \frac{b}{M}$

On définit ainsi une fonction  $y$  de  $x$ , continue sur chaque rayon issu de  $x_0$ . Reste à savoir si cette fonction  $y$  est une fonction analytique de  $x$ ; c'est ce que nous démontrerons dans la suite: on ne peut l'affirmer dès maintenant avec certitude.

— Nous donnerons auparavant une autre démonstration, qui est aussi due à Cauchy: elle a l'avantage de donner directement pour intégrale une fonction analytique de  $x$ .

Si l'intégrale cherchée est une fonction analytique, on pourra la développer en série de Taylor:

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{1.2} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \dots$$

$$\text{Or, } \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = f(x_0, y_0) \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \quad \text{etc.}$$

On connaissant  $f(x, y)$  et ses dérivées partielles successives, donc on pourra calculer de proche en proche les coefficients du développe-



ment, qui sont les dérivées successives de  $y$  par rapport à  $x$ .  
Si cette série est convergente, ce sera la solution de l'équation différentielle:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Car,  $y$  étant holomorphe en  $x$ , on aurait 2 fonctions holomorphes de  $x$ :  $y$  et  $\int f(x, y_0) dx$

qui seraient égales ainsi que toutes leurs dérivées pour  $x = x_0$ .  
Elles seraient donc identiques, attendu que  $y$  prend pour  $x = x_0$  la valeur  $y_0$ . On aurait:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Cauchy a employé divers moyens pour éliminer la convergence de cette série, notamment la méthode qu'il appelle «calcul des limites» et qui est une méthode de comparaison entre 2 séries dont l'une est certainement convergente.

Le meilleur procédé, ou du moins celui qui donne le plus grand rayon de convergence pour la série, est dû à Briot & Bouquet (Cauchy l'avait indiqué). Mais, en compensation, il donne une limite de convergence inférieure à celle qu'on obtient par la 1<sup>re</sup> méthode de Cauchy, méthode la plus directe & la plus logique, qui consiste à considérer l'équation différentielle comme la limite d'une équation aux différences finies.

Faisons, pour simplifier l'écriture:  $x_0 = 0$   $y_0 = 0$ .  
 $y$  sera alors exprimée en série de Maclaurin:

$$y = y'x + \frac{y''}{1.2} x^2 + \frac{y'''}{1.2.3} x^3 + \dots$$

On peut trouver une fonction  $Q(x, y)$  dont toutes les dérivées partielles (pour  $x=0, y=0$ ) aient un module supérieur aux dérivées correspondantes de  $f(x, y)$ :

$$Q(x, y) = \frac{M}{(1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b})}$$



$M$  étant le module maximum de  $f(x, y)$  dans les 2 cercles où elle est holomorphe. On doit avoir :

$$\left| \frac{\partial^{n+n'} f}{\partial x^n \partial y^{n'}} \right| > \left| \frac{\partial^{n+n'} f}{\partial x^n \partial y^{n'}} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

Considérons l'équation :

$$\frac{dY}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{Y}{b}\right)}$$

Elle définit une fonction  $Y$  de  $x$ , qui s'annule pour  $x=0$ .

Si elle est holomorphe dans le voisinage de  $x$ , on pourra représenter cette fonction par une série de Maclaurin :

$$Y = Y'x + \frac{Y''}{1,2} x^2 + \frac{Y'''}{1,2,3} x^3 + \dots$$

où  $Y', Y'', Y''', \dots$  sont positives, car le 2<sup>e</sup> membre doit être essentiellement positif. Ainsi  $Y$  sera une série à coefficients réels et positifs, donc croissante quand  $x$  croît en valeur absolue.

Pour prouver la convergence de la série qui représente  $y$ , comparons-la à la série  $Y$  : chaque coefficient de la 1<sup>re</sup> est inférieur en valeur absolue au coefficient correspondant de la dernière : en effet :

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$Y'' = \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \frac{dY}{dx}$$

$$|y_0'| < Y_0' = M \quad \left( \text{puisque } |f(x, y)| \leq M \right)$$

En comparant ces 2 expressions, on voit que chaque terme de la 1<sup>re</sup> est moindre en valeur absolue que le terme correspondant de la 2<sup>e</sup> ; donc :

$$|y''| < |Y''| \quad \text{de même} \quad |y''| < |Y''| \quad \text{et ainsi de suite}$$

Donc, si la série  $Y$  est convergente dans un certain cercle, la série  $y$  sera à fortiori convergente dans un cercle de rayon au moins égal. — Pour démontrer la convergence de la série  $Y$ , il





suffit d'exprimer explicitement la fonction  $Y$  et de montrer qu'elle est holomorphe. Or l'équation différentielle en  $Y$  peut s'écrire:

$$\frac{dY}{dx} - \frac{Y}{b} \frac{dY}{dx} = \frac{M}{1 - \frac{x}{a}}$$

Intégrons:

$$Y - \frac{1}{2b} Y^2 = -aM \log\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

Le logarithme ayant une infinité de déterminations, prenons celle qui s'annule pour  $x=0$ :  $\log 1 = 0$ .

La constante d'intégration est nulle puisque  $Y$  doit être nulle pour  $x=0$ . On aura  $Y$  en résolvant cette équation du 2<sup>e</sup> degré:

$$Y^2 - 2bY - 2abM \log\left(1 - \frac{x}{a}\right) = 0$$

$$Y = b \pm \sqrt{b^2 + 2abM \log\left(1 - \frac{x}{a}\right)}$$

La quantité soumise au radical est une fonction déterminée pour  $x=0$ ; il faut prendre pour le radical le signe  $-$  pour que  $Y=0$  quand  $x=0$ . On a ainsi une fonction  $Y$  holomorphe dans le voisinage de  $x=0$  jusqu'à ce que le radical s'annule:

$$b + 2aM \log\left(1 - \frac{x}{a}\right) = 0$$

d'où:

$$\log\left(1 - \frac{x}{a}\right) = -\frac{b}{2aM}$$

$$1 - \frac{x}{a} = e^{-\frac{b}{2aM}}$$

$$x = a\left(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}\right)$$

Ainsi  $Y$  est holomorphe, et la série qui la représente est convergente à l'intérieur d'un cercle de rayon  $\rho = a\left(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}\right)$ .

Donc le développement de  $y$  sera convergent dans ce cercle: on voit qu'il est plus petit que le cercle de rayon  $a$ . Il faut s'assurer que, quand  $x$  reste dans ce cercle,  $y$  reste dans le cercle de rayon  $b$ , afin que  $f(x,y)$  reste dans le champ où elle est définie.



Or, si l'on donne à  $x$  la plus grande valeur absolue:

$$a(1 - e^{-\frac{b}{2am}})$$

$Y$  aura son module maximum;

c'est précisément  $b$ , puisque la valeur attribuée à  $x$  annule le radical. Donc, pour  $|x| < a(1 - e^{-\frac{b}{2am}})$  on a:

$$|Y| \leq b$$

et a fortiori:

$$|y| < b$$

ce qu'il fallait vérifier. On en conclut que  $\frac{dy}{dx}$  est une fonction identique à  $f(x, y)$  et définie dans le même champ, c'est-à-dire que  $y$  est bien la solution de l'équation différentielle.

On peut affirmer de plus que cette intégrale est unique, pourvu qu'on aille de  $x_0$  à  $X$  par un chemin fini. On le démontre comme pour le cas des variables réelles -

Soit en effet  $(y+u)$  une seconde intégrale de l'équation différentielle, ayant la même valeur à l'origine, c'est-à-dire  $u$  s'annulant pour  $x = 0$ ; on a à la fois:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dx} = f(x, y+u)$$

$$\text{d'où: } \frac{du}{dx} = f(x, y+u) - f(x, y) = u \Phi(x)$$

$\Phi(x)$  étant une fonction continue de  $x$  le long de l'arc de courbe fini qui joint  $0$  à  $X$ . Il s'agit de montrer que l'intégrale de l'équation:  $\frac{du}{dx} = u \Phi(x)$ , qui est nulle pour

$x = 0$ , est identiquement nulle. Or on a, en intégrant:

$$\log \frac{u}{u_0} = \int_{x_0}^x \Phi(x) dx$$

On prendra l'intégrale jusqu'à un point où  $u$  s'annule; il n'y en



a pas avant 0: on prendra donc l'intégrale de  $x_0$  à  $-0$ , elle sera finie, et le logarithme deviendra infini, ce qui implique contradiction. L'hypothèse est donc absurde, et le théorème est démontré, pourvu que la ligne  $(0, x_0)$  ait une longueur finie.

Nous allons donner à cette démonstration une autre forme, qui a l'avantage de s'étendre au cas de plusieurs équations différentielles et de plusieurs fonctions inconnues.

Pour prouver que l'intégrale de l'équation:  $\frac{du}{dx} = u \Phi(x)$  est identiquement nulle, posons:  $V = Au$

$A$  étant une fonction arbitraire,  $\frac{dV}{dx} = \frac{dA}{dx} u + A \frac{du}{dx}$

$$\frac{dV}{dx} = u \left[ \frac{dA}{dx} + A \Phi(x) \right]$$

On peut choisir la fonction  $A$  de manière qu'elle annule identiquement l'expression:  $\frac{dA}{dx} + A \Phi(x)$

et que pour  $x=0$ , elle se réduise à une valeur arbitraire  $A_0$ .

(C'est la solution d'une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre, et elle s'obtient par une simple quadrature.) On aura alors constamment:

$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad \text{d'où:} \quad V = C^te$$

Or à l'origine,  $V=0$ , puisque  $u=0$ ; donc  $V$  est nulle identiquement, et par suite  $u$  l'est aussi, c.g.f. d.

— Nous pouvons maintenant comparer entre elles les 2 méthodes, des deux auteurs de Cauchy, mais dont la seconde a été adoptée par Briot et Bouquet (page 48, page 100.)

La première donne pour l'intégrale une succession de valeurs



sur chaque rayon du cercle de rayon  $\rho$ , satisfaisant aux inégalités:

$$\rho \leq a, \quad \rho \leq \frac{b}{M}$$

Pour chaque point  $x$  de ce cercle on a une valeur déterminée pour l'intégrale; il n'en résulte pas nécessairement que l'intégrale est une fonction holomorphe dans tout le cercle. On est pas en état de le démontrer, car le rayon de ce cercle est plus grand que le rayon de convergence qu'on trouve par la seconde méthode:

$$a(1 - e^{-\frac{b}{2aM}})$$

Si  $\rho = a$ , cela est évident. Si  $\rho = \frac{b}{M}$ , on peut prouver qu:

$$a(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}) < \frac{b}{M}$$

Posons:  $\frac{b}{2aM} = x$   $x$  est essentiellement positif

L'inégalité devient:  $1 - e^{-x} < 2x$

ou:  $2x + e^{-x} - 1 > 0$

Or, pour  $x = 0$ :  $2x + e^{-x} - 1 = 0$

Preuve la dérivée:  $2 - e^{-x}$  Elle est positive quand

$x$  croît à partir de 0; donc:  $2x + e^{-x} - 1 > 0$

Ainsi la limite de convergence fournie par la seconde méthode est toujours inférieure à  $\rho \leq a, \rho \leq \frac{b}{M}$ .

Il est donc intéressant de démontrer que l'intégrale est holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon  $\rho$ .

Soient  $\varepsilon, \eta$  2 quantités positives fixes aussi petites qu'on veut. On considérera les 2 cercles de rayons respectifs  $(a - \varepsilon), (b - \eta)$



dans les plans respectifs de  $x$  et de  $y$ ; soient  $x_1, y_1$  2 points pris à l'intérieur de ces 2 cercles;  $f(x, y)$  est holomorphe au voisinage de  $x_1, y_1$  à l'intérieur de cercles tracés autour de ces 2 points et ayant pour rayons respectifs  $\varepsilon$  et  $\eta$ . Si autour du point  $x_1$  on décrit un cercle de rayon:

$$r = \varepsilon \left( 1 - e^{-\frac{\eta}{2\varepsilon n}} \right)$$

on aura, en vertu de la 2<sup>e</sup> démonstration, une intégrale qui se réduira à  $y_1$  pour  $x = x_1$ , et qui sera holomorphe à l'intérieur de ce cercle  $r$ . Elle coïncide d'ailleurs avec l'intégrale obtenue par la 1<sup>re</sup> méthode et définie dans tout le cercle  $\varepsilon$ , puisque leurs valeurs en  $x_1$  sont les mêmes, et qu'il n'y a qu'une intégrale, prenant sur chaque rayon du cercle  $\varepsilon$  une suite de valeurs déterminées.

Cela posé, prenons d'abord pour centres des cercles  $\varepsilon, \eta$ , les points  $x_0, y_0$ , centres des cercles  $(a-\varepsilon), (b-\eta)$ . On aura une intégrale holomorphe dans le cercle de rayon  $r$  et de centre  $x_0$ , et se réduisant à  $y_0$  pour  $x = x_0$ . Dans ce cercle prenons un point  $x_1$  très près du bord; à  $x_1$  correspondra  $y_1$  à l'intérieur du cercle de rayon  $\eta$  et de centre  $y_0$ , donc à fonction, intérieure au cercle de rayon  $(b-\eta)$ . Décrivons autour de  $x_1$  un nouveau cercle de rayon  $r$ ; on aura une nouvelle intégrale définie dans ce cercle, et on pourra, par la 1<sup>re</sup> méthode, la définir le long du rayon  $x_0 x_1$  jusqu'au bord du nouveau cercle; les valeurs correspondantes de  $y$  seront toujours dans le cercle de centre  $y_0$  et de rayon  $(b-\eta)$ . On peut faire tourner le point  $x_1$  autour de  $x_0$ ; le petit cercle mobile engendrera un cercle de centre  $x_0$ , de rayon presque égal à  $2r$ , à l'intérieur duquel l'intégrale sera holomorphe. On prendra de nouveau



107

un point  $x_0$ , très voisin du bord de ce cercle, et on l'entourera  
d'un cercle de rayon  $\varepsilon$ , qu'on fera ensuite tourner; on définira  
ainsi l'intégrale dans un cercle de rayon presque égal à  $3\varepsilon$   
autour de  $x_0$ , et ainsi de suite; on étendra progressivement laire  
où l'intégrale est holomorphe jusqu'au cercle de rayon  $(a - \varepsilon)$ .  
On s'arrêtera là, parce que si on le dépassait, les cercles  $\varepsilon$  con-  
tiendraient des points  $x$  auxquels correspondraient des points  $y$   
extérieurs au cercle  $(b - \eta)$ , et l'intégrale ne serait plus  
holomorphe.

Il y a donc une intégrale et une seule, de l'équation différentielle:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

qui prend, pour  $x = x_0$ , la valeur  $y_0$ , si  $f(x, y)$  est continue  
dans le cas de variables réelles, si  $f(x, y)$  est holomorphe dans le  
cas de variables imaginaires, et si de plus, dans ce dernier cas,  
le chemin suivi de  $x_0$  à  $X$  est fini. S'il n'était pas fini, en  
effet, il pourrait y avoir plusieurs intégrales, et même une infinité.

— On a sévèrement reproché à Briot et Bouquet d'avoir  
omis cette dernière condition, qui leur paraissait évidente, et que  
d'ailleurs leur démonstration implique. On prétend infirmer  
cette démonstration en proposant un exemple où l'intégrale  
peut prendre une infinité de valeurs pour  $x = x_0$ . Considérons  
en effet l'équation différentielle:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$

Supposons:  $y_0 = 0$   $x_0 \neq 0$ .

La fonction  $\frac{y^2}{x}$  est holomorphe au voisinage de  $x_0$ ; on a donc



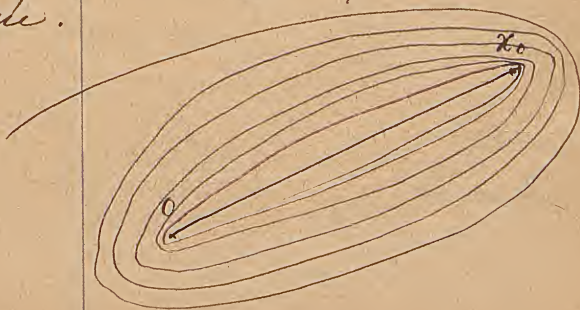
L'intégrale:  $-\frac{1}{y} = \log x + C$

$$y = -\frac{1}{\log x + C}$$

Partons d'un point arbitraire  $x$  et décrivons un chemin qui tourne dans le même sens autour des 2 points  $O$  et  $x_0$ , indéfiniment, en s'enveloppant lui-même. On dit que ce chemin tend vers  $x_0$ , parce qu'à chaque tour il se rapproche de ce point et doit passer, après un nombre suffisant de tours, aussi près qu'on voudra de  $x_0$ . Or  $\log x$  augmente à chaque tour de  $2\pi i$ , donc  $y$  tend vers  $0$  quand le chemin s'allonge indéfiniment; à chaque tour, on peut s'arrêter <sup>en un point</sup> ~~et s'arrêter~~ <sub>voisin de</sub>  $x_0$ ; on aura une valeur différente pour  $y$ ; on peut donc dire qu'il y a une infinité d'intégrales qui pour  $x = x_0$ , prennent la valeur  $y_0$ , c.à.d. qui tendent vers  $0$  quand le chemin issu de  $x$  tend vers le point  $x_0$ .

Mais cet exemple est spécieux; on ne peut pas dire que le chemin tende vers le point  $x_0$ , car s'il est vrai qu'il se rapproche indéfiniment de ce point, il s'en éloigne tout aussi à chaque tour d'une quantité finie voisine de la distance  $(O, x_0)$ . Tout au plus peut-on dire qu'il tend vers la droite  $Ox_0$  tout entière, ce qui explique l'indétermination de l'intégrale. En tout cas, l'argument ne porte pas contre la démonstration de Briot & Bouquet, car elle implique la condition du chemin fini qu'on prétend que ces auteurs ont négligé.

Harnack





109

Considérons maintenant n équations différentielles ordinaires du 1<sup>er</sup> ordre à n fonctions inconnues :

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

On suppose d'abord que  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sont continues au voisinage des valeurs  $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$  assignés aux fonctions inconnues pour  $x = x_0$ . On suppose de plus, comme dans le cas d'une seule fonction inconnue, n conditions de la forme suivante :

$$|f(x, y_1', y_2', \dots, y_n') - f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)| < k_1(y_1' - y_1) + k_2(y_2' - y_2) + \dots + k_n(y_n' - y_n)$$

$k_1, k_2, \dots, k_n$  étant des constantes qui ne sont pas nécessairement les mêmes pour les n fonctions  $f$ .

Ces hypothèses faites, on démontrera, exactement comme dans le cas d'une seule fonction inconnue  $y$ , l'existence d'un système de n intégrales vérifiant les équations précédentes dans l'intervalle  $\Delta a$  pour  $x$ , et dans les intervalles  $\Delta b_1, \Delta b_2, \dots, \Delta b_n$  pour  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , et prenant, pour  $x = x_0$ , les valeurs  $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ .

On devra prendre pour intervalle défini de  $x$  la plus petite des quantités :  $a, \frac{b_1}{M}, \frac{b_2}{M}, \dots, \frac{b_n}{M}$

$M$  étant le module maximum des n fonctions  $f$  dans les intervalles  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .



On peut aussi employer la 2<sup>e</sup> méthode (page 95) Considérons seulement 2 équations différentielles :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z)$$

avec les conditions :

$$|f(x'y'z') - f(x, y, z)| < A$$

$$|\varphi(x'y'z') - \varphi(x, y, z)| < B.$$

On part des valeurs  $y_0, z_0$ , et on résout les équations :

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x, y_0, z_0)$$

$$\frac{dz_1}{dx} = \varphi(x, y_0, z_0)$$

on en tire les fonctions  $y_1, z_1$  qui doivent prendre les valeurs  $y_0, z_0$  pour  $x = x_0$ ; puis on les substitue, et on a les équations :

$$\frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, z_1)$$

$$\frac{dz_2}{dx} = \varphi(x, y_1, z_1)$$

qui déterminent de nouvelles fonctions  $y_2, z_2$  qui doivent se réduire à  $y_1, z_1$  pour  $x = x_0$ ; et ainsi de suite indéfiniment. On trouve ainsi une succession de fonctions :

$$y_1, z_1, y_2, z_2, \dots, y_m, z_m, \dots$$

On démontre qu'elles tendent respectivement vers des limites  $y, z$ , quand  $m$  augmente indéfiniment, et que les fonctions  $y, z$  sont définies par des séries convergentes dans le cercle de centre  $x_0$  dont le rayon est la plus petite des 3 quantités :  $a, \frac{b}{M}, \frac{1}{A+B}$ .

On peut enfin employer la 3<sup>e</sup> méthode, celle de la comparaison des séries (page 100). Le rayon de convergence est encore plus restreint; il est :

$$a \left( 1 - e^{-\frac{b}{(n+1)AM}} \right) \quad (\text{on suppose } b \text{ et } M \text{ les mêmes pour tous les } f.)$$

inférieur à la fois à  $\frac{a}{A}$  et à  $\frac{b}{M}$ .



Il faut que le nombre  $n$  des équations s'introduit ici sans nécessité intrinsèque. Cette méthode est donc la moins avantageuse pour l'étendue du champ où les intégrales sont définies.

On démontre encore ici que le système de solutions  $y, z$  auquel on arrive par l'une ou l'autre de ces méthodes est unique. Supposons que les équations admettent d'autres solutions :

$$y+u, \quad z+v$$

se réduisant aussi à  $y_0, z_0$  pour  $x=x_0$ .

$$\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dx} = f(x, y+u, z+v)$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dv}{dx} = \varphi(x, y+u, z+v)$$

$$\frac{du}{dx} = f(x, y+u, z+v) - f(x, y, z) = u f_1(x) + v f_2(x)$$

$$\frac{dv}{dx} = \varphi(x, y+u, z+v) - \varphi(x, y, z) = u \varphi_1(x) + v \varphi_2(x)$$

On va démontrer que les fonctions  $u, v$ , intégrales de ce nouveau système d'équations, qui s'annulent pour  $x=x_0$ , sont constantes, c'est-à-dire identiquement nulles. Posons (cf. page 104) :

$$V = \alpha u + \beta v$$

$\alpha$  et  $\beta$ , fonctions arbitraires.

$$\frac{dV}{dx} = u \frac{d\alpha}{dx} + v \frac{d\beta}{dx} + \alpha \frac{du}{dx} + \beta \frac{dv}{dx}$$

$$= u \left[ \frac{d\alpha}{dx} + \alpha f_1(x) + \beta \varphi_1(x) \right] + v \left[ \frac{d\beta}{dx} + \alpha f_2(x) + \beta \varphi_2(x) \right]$$

Disposons de  $\alpha, \beta$  de manière à rendre  $\frac{dV}{dx}$  identiquement nulles :

$$\frac{d\alpha}{dx} + \alpha f_1(x) + \beta \varphi_1(x) = 0$$

$$\frac{d\beta}{dx} + \alpha f_2(x) + \beta \varphi_2(x) = 0$$

On peut trouver des fonctions  $\alpha, \beta$  de  $x$  vérifiant ces 2 équations différentielles et prenant pour  $x=x_0$  les valeurs arbitraires  $\alpha_0, \beta_0$ .



On a alors:  $\frac{dV}{dx} = 0$ ,  $V = C^te$

Or  $u, v$  sont nulles pour  $x = x_0$ ; donc  $V$  est constamment nulle, selon a identiquement:  $\alpha u + \beta v = 0$

On peut trouver d'autres fonctions  $\alpha', \beta'$  vérifiantes les mêmes équations, et prenant pour  $x = x_0$  les valeurs arbitraires  $\alpha'_0, \beta'_0$ .

On aurait encore identiquement:  $\alpha' u + \beta' v = 0$

Or on peut toujours faire que:  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0$

Pour que les 2 identités précédentes aient lieu, il faut que  $u, v$  soient constamment nulles, c. g. f. d.

On a vu que l'équation différentielle:  $\frac{du}{dx} = f(u, x)$  si  $f(u, x)$  est holomorphe, est vérifiée par une fonction  $u$  de  $x$  se réduisant à  $u_0$  en  $x_0$  et définie dans un cercle autour de  $x_0$ .

Considérons le cas particulier où l'équation a la forme:

$$\frac{du}{dx} = Au^2 + Bu + C$$

$A, B, C$  étant des fonctions analytiques de  $x$  ayant pour points singuliers les points  $a, b, c, \dots$  dans le plan des  $x$ . Si l'on part d'un point  $x_0$  différent de  $a, b, c, \dots$  avec une valeur  $u_0$ , on peut suivre la fonction par continuité sur un chemin quelconque ne passant pas par  $a, b, c, \dots$ . Entourons donc  $a, b, c, \dots$  de petits cercles  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  de rayons fixes aussi petits qu'on veut, où le point  $x$  ne devra pas entrer. D'autre part,  $u$  ne devant pas devenir infini, excluons le point à l'infini en traçant dans le plan des  $u$ , de l'origine comme centre, un cercle  $\Gamma$  d'un rayon



aussi grand qu'on voudra: on peut toujours faire en sorte que  
u se trouve à l'intérieur de ce cercle. Tant que u ne sortira pas  
 de  $I$ ,  $\frac{du}{dz}$  sera finie et déterminée, et la fonction aura un rayon  
 de convergence fini = en donnant d'autre part à  $z$  une valeur  
 extérieure aux cercles  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  c-à-d. différente de  $a, b, c, \dots$   
 d'une quantité finie, les fonctions  $A, B, C$  seront parfaitement  
 déterminées; on aura donc pour tout point u situé dans  $I$   
 un développement convergent dans un certain cercle autour de ce  
 point, et le rayon de convergence aura un minimum non nul,  
 soit  $\rho$ . Donc, tant que u reste dans  $I$ , on a une ~~développement~~  
 au voisinage de ce point dans un cercle de rayon au moins égal à  $\rho$ <sup>fonction holomorphe</sup>.

— Supposons maintenant que u sorte du cercle  $I$ ; considérons  
 l'équation transformée qu'on obtient par le changement de variable:

$$u = \frac{1}{v} \quad - \frac{dv}{dz} = A + Bv + Cv^2$$

C'est une équation de même forme que la première; la région exté-  
 rieure à  $I$  dans le plan des u est transformée en un petit cercle entou-  
 rant l'origine,  $v$ , dans le plan des  $v$ . Quand  $v$  est dans  $\gamma$ , on a  
 un certain développement dont le rayon de convergence a un  
 minimum non nul,  $\rho'$ ; soit  $\varepsilon$  la plus petite des 2 quantités  
 $\rho, \rho'$ , on pourra toujours prolonger la fonction dans un rayon  $\varepsilon$ .

Remarquons que la fonction u ne sera pas nécessairement holo-  
 morphique sous la forme  $\frac{1}{v}$ ; mais elle n'aura que des pôles, qui  
 seront les racines de  $v$ . On peut donc en partant de  $z_0$ , prolonger  
 la fonction de proche en proche avec le rayon  $\varepsilon$ , et atteindre de un point



quelconque  $z_0$  situé en dehors des petits cercles  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ .  
 D'ailleurs il n'y a pas d'autres points singuliers pour  $z$  que les points  $a, b, c, \dots$  qui sont les pôles ou points singuliers essentiels de  $A, B, C$ . La valeur obtenue pour  $u$  en allant de  $z_0$  à  $z$  par divers chemins est toujours la même; car 2 chemins voisins pour tout être enfermés dans une même série linéaire de cercles de rayon  $\epsilon$ , et entre 2 chemins quelconques on pourra toujours intercaler un nombre suffisant, mais fini, de chemins voisins distants de moins de  $2\epsilon$ . Donc, dans toute région du plan limitée par un contour simple et n'enfermant aucun des points  $a, b, c, \dots$  l'intégrale  $u$  est une fonction analytique une forme qui n'a que des pôles.  
 Examinons maintenant le cas particulier de l'intégrale elliptique:

$$z = \int \frac{du}{\sqrt{A(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}}$$

qui provient d'une équation différentielle de la forme:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = A(u-a)(u-b)(u-c)(u-d) \quad A \text{ constante.}$$

La fonction  $u$  sera parfaitement définie si en partant de  $z_0$  on se donne une détermination du radical. On va montrer qu'on peut étendre cette fonction de proche en proche dans tout le plan au moyen d'un cercle de rayon fini, comme ci-dessus.

Considérons le plan des  $u$ :  $u$  admet pour points critiques:  $a, b, c, d$  et  $\infty$ . Isolons les 4 pôles  $a, b, c, d$  par de petits cercles  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , et le point  $a$  à l'infini par un grand cercle  $\Gamma$  ayant l'origine pour centre. Partons de  $z_0$  avec la valeur initiale  $u_0$  différente de  $a, b, c, d$ , c.à.d. extérieure aux cercles  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .



115

On peut toujours supposer que  $u_0$  se trouve dans le grand cercle  $I$ ,  
 et par conséquent dans la région limitée par les 5 contours  $I, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ .  
 Tant que  $u$  ne sort pas de cette région, on a un développement  
 bien déterminé en chaque point, avec un rayon de convergence  
 fini; ce rayon a un certain minimum non nul  $\rho$ . Mais  
 $u$  peut sortir de la région indiquée, soit en entrant dans un des  
 cercles  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , soit en sortant du cercle  $I$ .

Si  $u$  pénètre dans  $\alpha$ , par exemple, nous transformerons  
 l'équation par le changement de variable:  $u = a + v^2$

La nouvelle variable fonction  $v$  sera dans son plan à l'intérieur  
 d'un cercle  $\alpha'$  ayant pour centre l'origine, d'un rayon très-petit.

L'équation devient:  $\frac{du}{dz} = 2v \frac{dv}{dz} = \sqrt{A v^2 (a-b+v^2)(a-c+v^2)(a-d+v^2)}$

ou:  $2 \frac{dv}{dz} = \sqrt{A(a-b+v^2)(a-c+v^2)(a-d+v^2)}$

Tout revient à étudier la fonction  $v$  dans le cercle  $\alpha'$ . Or le radical  
 ne s'annule pas quand  $v$  reste dans ce cercle, car  $a, b, c, d$   
 sont supposés distincts; donc  $\frac{dv}{dz}$  est holomorphe à l'intérieur de  
 ce cercle; le développement de  $v$  admet donc un rayon minimum  
 de convergence non nul  $\rho_1$ . Ainsi quand  $u$  s'approche  
 indéfiniment du pôle  $a$ , on pourra développer  $(u-a)$  dans un  
 cercle de rayon  $\rho_1$ . De même, on aurait des développements conver-  
 gents au voisinage de  $b, c, d$ , dans des cercles de rayons  $\rho_2, \rho_3, \rho_4$ .  
 Ainsi, tant que  $u$  reste dans  $I$ , on peut développer l'intégrale  
 en série de Taylor dans un cercle de rayon au moins égal au plus  
 petit des rayons:  $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ .



Si  $u$  sort du cercle  $I$ , on posera :  $u = \frac{1}{v}$   
 et le changement de variable transforme l'extérieur du cercle  $I$  en  
 un cercle ayant pour centre l'origine et un rayon très petit dans le  
 plan des  $v$ . L'équation différentielle devient :

$$-\frac{dv}{dx} = \sqrt{A(1-av)(1-bv)(1-cv)(1-dv)}$$

Chaque détermination du radical est une fonction holomorphe de  $v$   
 dans ce petit cercle. Le développement aura donc dans ce cercle  
 un rayon minimum de convergence, soit  $\rho'$ . En résumé, on  
 peut faire l'extension analytique ~~par une~~ soit de  $u$ , soit de  $\frac{1}{u}$ ,  
 développés en série de Taylor, au moyen d'un cercle de rayon fini  
 $\underline{r}$ ,  $\underline{r}$  étant la plus petite des 6 quantités :  $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho'$ .

Ici encore, les racines de  $\Delta$  sont des pôles pour la fonction  $u$ ; mais  
 celle-ci n'admet que des pôles.

— Revenons à l'équation générale du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x) \quad (1)$$

On entre la fonction  $y$  holomorphe en  $x$  au voisinage de  $x_0$ ,  
 c'est-à-dire développée suivant les puissances croissantes de  $(x-x_0)$  et  
 se réduisant à  $y_0$  en  $x_0$  :

$$y = \varphi(x, y_0)$$

Inversement, cette relation définit  $y_0 = F(x, y)$   
 fonction holomorphe de  $y$  au voisinage du point  $(x, y)$  considéré  
 comme point initial,  $y_0$  étant la valeur qui correspond au point  
 variable  $x_0$ . — L'intégrale générale de l'équation différentielle  
 est donc :

$$F(x, y) = C$$

et elle est complètement définie quand on assigne à la constante



117

arbitraire  $C$  la valeur  $y_0$ . Or, quelle que soit la constante  $C$ , la fonction  $F(x, y)$  satisfait l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

On a donc identiquement:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} f(y, x) = 0 \quad (2)$$

quel que soient  $x, y$ .

Il y a une infinité de fonctions satisfaisant à cette équation, mais elles ont entre elles des relations. Soient 2 fonctions  $F, F_1$  qui satisfont à cette équation; on a:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

d'où:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

ce qui prouve que  $F$  &  $F_1$  sont fonctions l'une de l'autre. Donc, si l'on a pu trouver une solution  $F$  de cette équation, toute fonction de  $F$  en sera une solution, & toute solution de cette équation sera une fonction de  $F$ .

Pour avoir l'intégrale générale de l'équation différentielle ordinaire (1) il suffira d'égaliser à une constante la fonction  $F$  vérifiant l'équation (2). Ainsi l'intégration de l'équation différentielle ordinaire (1) est équivalente à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (2). On peut donc ramener la résolution de l'équation (1) à celle de l'équation:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(y, x) \frac{\partial F}{\partial y}$$

Comme cette équation a une infinité de solutions, qui se déduisent toutes d'une seule, il faut pour déterminer la solution  $F$ , lui imposer certaines conditions initiales.

Supposons  $f(x, y)$  holomorphe dans le voisinage de  $x_0, y_0$ , & cherchons s'il y a une fonction  $F(x, y)$  vérifiant l'équation



précédente et se réduisant pour  $x = x_0$  à une fonction donnée de  $y$ ,  $\varphi(y)$ , holomorphe dans le voisinage de  $y_0$  :

$$F(x_0, y) = \varphi(y)$$

C'est, dans le cas le plus simple, le problème général de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Or la fonction  $F$  doit pouvoir se développer en une série de Taylor convergente au voisinage de  $x_0$  :

$$F(x, y) = F(x_0, y) + (x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dots$$

les dérivées partielles successives sont prises pour  $x = x_0$ ,  $y$  restant arbitraire. On peut calculer les coefficients de ce développement; on a d'abord :

$$F(x_0, y) = \varphi(y)$$

puis :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y) \frac{\partial F}{\partial y}$$

pour  $x = x_0$ .

$\frac{\partial F}{\partial y}$  est fonction de  $x, y$ ; mais on peut faire d'abord  $x = x_0$ , puis dériver par rapport à  $y$  :

$$\left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 = \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f(x, y) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y}$$

pour  $x = x_0$ .

Or  $\left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 = \varphi'(y)$ ; d'autre part :

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_0 = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 = \frac{\partial}{\partial y} \left( f(x_0, y) \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \right)$$

tous ces termes étant connus, on aura  $\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_0$ , et ainsi de suite.

On connaîtra donc le développement de  $F$  autour de  $x_0$ . Reste à savoir si ce développement est convergent dans le voisinage de  $x_0$ . Pour cela, on emploiera la méthode des limites de Cauchy, c'est-à-dire qu'on comparera ce développement avec une série certainement convergente.



119

Nous traiterons d'abord le ~~cas~~ <sup>problème</sup> suivant: Soient  $u_1, u_2, \dots, u_m$   $m$  fonctions de  $x, y$ , et entre elles  $m$  équations aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \sum A_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = \sum B_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \quad \dots \quad \frac{\partial u_m}{\partial x} = \sum I_i \frac{\partial u_i}{\partial y}$$

où les  $\sum$  comprennent  $m$  termes:  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ .

On veut trouver des fonctions  $u_1, u_2, \dots, u_m$  vérifiant ces équations, et se réduisant pour  $x = x_0$  à des fonctions données de  $y$ , c'à d:

$$u_i(x_0, y) = \varphi_i(y)$$

On pourra développer, comme dans le cas précédent, les  $m$  fonctions  $u$  en série, et on calculera  $\frac{\partial u_i}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \dots$  pour  $x = x_0$ .

Reste à savoir si ces développements sont convergents au voisinage du point  $x_0, y_0$ . Supposons pour simplifier:  $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$  et que  $\varphi_i$  s'annule pour  $y = y_0$ , c'à d:  $\varphi_i(0) = 0$ .

Les coefficients  $A, B, \dots, I$  sont supposés fonctions de  $u_1, u_2, \dots, u_m$  holomorphes dans des cercles de rayon commun  $\rho$  autour des p.  $u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_m = 0$ , dans les plans respectifs. De plus, les fonctions  $\varphi$  sont supposés holomorphes dans le plan des  $y$  à l'intérieur d'un cercle de centre 0 et de rayon  $\rho$ .

Or, étant données  $m$  fonctions  $u_1, u_2, \dots, u_m$  holomorphes, on peut trouver une fonction dite de comparaison, c'à d, une fonction de  $u_1, u_2, \dots, u_m$  ayant toutes ses dérivées partielles positives pour  $u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_m = 0$ , et supérieures



en valeur absolue aux dérivées correspondantes de toutes les fonctions  $A, B, \dots, I$ .

On a employé plus haut (page 100) dans la méthode de Briot & Bouquet, une fonction de comparaison dans le cas de 2 variables  $x, y$  :

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)} \quad M \text{ mod. max. de } f(x, y) \quad |x| < a, \quad |y| < b.$$

M. Weierstrass a proposé un autre type de fonction de comparaison, qui est :

$$\frac{M}{1 - \frac{x+y}{c}} \quad \text{fonction définie et holomorphe pourvu que : } |x| < \frac{c}{2}, \quad |y| < \frac{c}{2}.$$

Elle satisfait aux mêmes conditions : toutes ses dérivées partielles sont positives pour  $x=0$ , et ont un module supérieur aux dérivées correspondantes de  $f(x, y)$  ; mais dans le cas de l'équation différentielle ordinaire, elle donnerait une limite de convergence encore plus étroite que la fonction de Briot & Bouquet, qui déjà resserre cette limite. Dans le cas des équations aux dérivées partielles, la fonction de M. Weierstrass a l'avantage de donner des expressions facilement intégrables, ce qui permet de calculer les termes du développement et de leur comparer ceux de la série à examiner. Dans le cas général de  $m$  fonctions, elle devient :

$$\frac{M}{1 - \frac{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_m}{c}} = K(u_1, u_2, u_3, \dots, u_m)$$

$M$  étant le module maximum de toutes les fonctions  $A, B, \dots, I$ . La fonction  $K$  satisfait aux conditions d'une fonction de comparaison, énoncées plus haut. On considérera le système des équations aux dérivées partielles transformé en remplaçant  $A, B, \dots, I$  par  $K$ .



D'autre part, les fonctions  $u_1, u_2, \dots, u_m$  sont définies par les équations de condition:

$$u_i(x_0, y) = \varphi_i(y)$$

les fonctions  $\varphi$  étant holomorphes dans le cercle de rayon  $\rho$  autour de  $y_0 = 0$ . Soit  $N$  leur module maximum; on prendra pour fonction de comparaison (type Briot & Bouquet):  $\frac{N}{1 - \frac{y}{\rho}}$ , ou plutôt, pour qu'elles s'annulent comme les  $\varphi$  pour  $y = 0$ :

$$\frac{N}{1 - \frac{y}{\rho}} - N = k(y)$$

Soient  $V_1, V_2, \dots, V_m$  les nouvelles fonctions se réduisant toutes à  $k(y)$  pour  $x = x_0 = 0$ , et définies par le nouveau système d'équations, où  $A, B, \dots, L$  sont remplacés par  $K, -V_1, V_2, \dots, V_m$  pourront se développer suivant les puissances de  $(x - x_0)$ , mais les coefficients de tous ces développements seront supérieurs aux coefficients des termes correspondants de  $u_1, u_2, \dots, u_m$ ; donc, pour prouver que les développements de  $u_1, u_2, \dots, u_m$  sont convergents, il suffira de démontrer que ceux de  $V_1, V_2, \dots, V_m$  sont convergents.

Considérons donc le nouveau système d'équations:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = \sum_j K \frac{\partial V_j}{\partial y} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

où  $K$  est la fonction <sup>de comparaison</sup> définie plus haut, holomorphe quand  $u_1, u_2, \dots, u_m$  restent dans un cercle de rayon  $\frac{\rho}{m}$ . Pour  $x = 0$ , chaque fonction  $V$  doit se réduire à la fonction de comparaison:  $\frac{N}{1 - \frac{y}{\rho}} - N = \frac{Ny}{\rho - y}$  supérieure à  $\varphi_i(y)$ .

$K$  devient, en substituant les  $V$  aux  $u$ :

$$\frac{M}{1 - \frac{V_1 + V_2 + \dots + V_m}{\rho}}$$



Dès lors, on n'a plus qu'une seule équation, et une seule fonction  $V$ ; toutes les équations du nouveau système se réduisent à :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Mm}{1 - \frac{mV}{r}} \frac{\partial V}{\partial y}$$

La fonction  $V$  doit vérifier la condition :

$$V(0, y) = \frac{Ny}{p-y}$$

On a donc à résoudre, pour trouver  $V$ ,

l'équation aux dérivées partielles :

$$\left(1 - \frac{mV}{r}\right) \frac{\partial V}{\partial x} - Mm \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

On peut trouver une équation finie donnant toutes les solutions de cette équation différentielle; en effet, la fonction  $V$  doit avoir une relation avec :

$$\left(1 - \frac{mV}{r}\right)y + Mmx = 0$$

Pour le prouver, formons le déterminant fonctionnel :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial x} \left(1 - \frac{mV}{r} - \frac{my}{r} \frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial V}{\partial y} \left(-\frac{my}{r} \frac{\partial V}{\partial x} - Mm\right) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} \left(1 - \frac{mV}{r}\right) - \frac{\partial V}{\partial y} Mm = 0 \end{aligned}$$

Il y a donc une relation entre ces 2 fonctions, on doit avoir :

$$\left(1 - \frac{mV}{r}\right)y + Mmx = F(V)$$

Or, pour  $x=0$ ,  $V$  doit se réduire à  $\frac{Ny}{p-y}$ ; on a donc :

$$\left(1 - \frac{m}{r} \frac{Ny}{p-y}\right)y = F\left(\frac{Ny}{p-y}\right)$$

$$\text{Posons: } z = \frac{Ny}{p-y}$$

$$\text{d'où: } y = \frac{pz}{N+z}$$

$$F(z) = \left(1 - \frac{m}{r} z\right) \frac{pz}{N+z}$$

Telle est la forme de la fonction cherchée  $F$ ; on doit donc avoir l'équation :

$$\left(1 - \frac{mV}{r}\right)y + Mmx = \left(1 - \frac{mV}{r}\right) \frac{pV}{N+V}$$



qui détermine la fonction  $V(x, y)$  satisfaisant l'équation différentielle et prenant pour  $x=0$  la valeur  $\frac{Ny}{p-y}$ .

Cette équation du 2<sup>e</sup> degré a 2 solutions en  $V$ , qui pour  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$  se réduisent à :  $V_1=0$ ,  $V_2=\frac{2}{m}$ .

On devra prendre la première, qui s'annule pour  $x=0$ ,  $y=0$ ; elle n'a que des racines simples, et elle est holomorphe au voisinage de  $x=0$ ,  $y=0$ . Elle est l'intégrale unique du 2<sup>e</sup> système, dit système de comparaison; et puisqu'elle est holomorphe, on en conclut que toutes les intégrales du 1<sup>er</sup> système ( $u_1, u_2, \dots, u_m$ ) sont développables en séries convergentes autour de  $x=0$ ,  $y=0$ , c'est plus généralement autour de  $x_0, y_0$ .

— Nous avons montré (page 117) que l'équation différentielle:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

est équivalente à l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

C'est que si l'on a trouvé une solution  $F$  de celle-ci, on aura l'intégrale générale de la première en posant:

$$F(x, y) = C^{\text{te}}.$$

Il restait à prouver que si l'on développe au voisinage de  $x=0$ , la fonction  $F$  qui pour  $x=0$  se réduit à une fonction donnée de  $y$ ,  $\varphi(y)$ , ce développement est convergent. Pour cela, nous servirons du théorème que nous venons d'établir pour le cas général de  $n$  équations simultanées aux dérivées partielles.



124  
Mais il faut auparavant remarquer une différence : dans le théorème précédent, les coefficients  $A, B, \dots, L$  des dérivées partielles dépendent des fonctions cherchées  $u, u_2, \dots, u_n$  ; ici, au contraire, le coefficient  $f$  dépend des variables  $x, y$ . Pour la faire disparaître, fournissons le système d'équations suivant :

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -f(x, y) \frac{\partial F}{\partial y} \quad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

Ce sont 3 équations aux dérivées partielles entre 3 fonctions  $F, X, Y$ , et les coefficients satisfont aux conditions du théorème précédent. On pourra donc obtenir des intégrales de ce système qui se réduisent, pour  $x=0$ , respectivement à des fonctions holomorphes données de  $y$ , par exemple :

$$F(0, y) = \varphi(y)$$

$$X(0, y) = 0$$

$$Y(0, y) = y$$

On fait ainsi coïncider  $X, Y$  avec  $x, y$  pour la valeur  $x=0$ , de sorte que le système (3) devient équivalent à l'équation (2). Admettons la solution :

$$X=x,$$

$$Y=y,$$

et c'est la seule, dans les conditions initiales données. Les fonctions qui vérifient le système (3) étant celles qui satisfont l'équation (2), on voit que  $F(x, y)$  <sup>est une</sup> solution de cette dernière équation qui se réduit à  $\varphi(y)$  pour  $x=0$ . On sait que  $F(x, y)$ , comme solution du système (3) est une fonction holomorphe ; il est donc démontré que l'intégrale de l'équation (2) est développable en série de Taylor au voisinage du point  $x=0$ .

Nous venons d'établir l'existence d'une fonction holomorphe  $F(x, y)$  qui est l'intégrale de l'équation (2) et qui se réduit à  $\varphi(y)$  pour  $x=0$ . La fonction  $\varphi$  étant arbitraire, nous pouvons supposer :

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi'(0) \neq 0.$$



125

Une fois trouvée cette fonction  $F(x, y)$ , il faut en déduire les intégrales de l'équation (1) qui s'annulent pour  $x=0$ . Pour cela, on doit évaluer  $F$  à une constante. Or on a:  $F(0, 0) = 0$   
donc cette constante doit être nulle, et l'on a l'équation:

$$F(x, y) = 0 \quad (4)$$

qui définit les intégrales de l'équation (1) qui s'annulent pour  $x=0$ .  
Or, on a démontré précédemment (pages 40 & 67) que si  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ , cette équation définit une fonction implicite  $y$  de  $x$ , et cette démonstration ne repose pas sur la théorie des équations différentielles. Donc nous pouvons affirmer que sous la condition:  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$   $\varphi'(0) \neq 0$  qui est vérifiée, l'équation (4) a une solution  $y$  et une seule, qui s'annule pour  $x=0$ , car on peut la mettre sous la forme:

$$0 = F(x, y) = [y - \varphi(x)] P(x, y) \quad \text{avec: } P(0, 0) \neq 0.$$

Donc l'autre:  $y = \varphi(x)$

fonction holomorphe qui doit vérifier l'équation (1) quand  $F(x, y)$  vérifie l'équation (2).

On trouve ainsi la solution de l'équation (1) et on démontre en même temps qu'elle est unique: il n'y a donc pas d'autre intégrale que l'intégrale holomorphe qui s'annule pour  $x=0$ . En fait même nous remarquons que, dans la démonstration de Briot & Bouquet, nous avons été obligés d'exclure l'hypothèse d'un chemin infini ayant pour point asymptotique  $x_0$ ; mais c'était là une considération technique au sujet, qui avait été seulement introduite par le mode de démonstration, de sorte que l'exception n'était qu'apparente. Ici, nous n'avons plus à tenir compte du chemin suivi, et on a sans aucune restriction l'intégrale holomorphe:  $y = \varphi(x)$



Le point  $(x=0, y=0)$  est un point arbitraire, car on peut toujours  
a) coïncider avec un point quelconque par un changement d'axes.

Examinons le cas où  $F'(0,0)$  devient infinie, mais de telle sorte  
que son inverse soit une fonction holomorphe  $\varphi(x,y)$  s'annulant  
pour  $x=0, y=0$  :  $\varphi(0,0)=0$  L'équation (2) devient :

$$\varphi(x,y) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Elle conserve la même forme, seulement  $y$  doit être considéré main-  
tenant comme variable et  $x$  comme fonction. On sait qu'on peut  
trouver une fonction  $F$  holomorphe au voisinage de  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$   
et se réduisant pour  $y=0$  à une fonction de  $x$  :  $\psi(x)$   
telle que  $\psi(0)=0$ . On l'égalera ensuite à une constante, et  
cette constante doit être nulle; donc :  $F(x,y)=0$  (4)

L'intégrale de l'équation (1) est une solution  $y$  de cette équation.  
Mais tandis que ~~plus haut~~ on avait :  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$  pour  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$   
ici on a au contraire :  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$  parce que :  $\varphi(x,y)=0$ .

On ne peut donc pas extraire de l'équation :  $F(x,y)=0$   
une fonction holomorphe  $y$  de  $x$ .

La fonction  $\psi$  étant arbitraire, supposons :  $\psi'(0) \neq 0$   
c'est :  $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$  pour  $x=0, y=0$

Dans ces conditions, la fonction  $F$  se met sous la forme :

$$F(x,y) = [x - \omega(y)] P(x,y) \quad P(0,0) \neq 0$$

L'équation (4) définit une fonction holomorphe :  $x = \omega(y)$   
d'où bon tirera, par inversion, les fonctions  $y$  de  $x$  qui sont



127

Les solutions cherchées. Or:  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$  donc  $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dx}{dy} = 0$ ,  
 car  $P_y'(0,0) \neq 0$ . On a donc pour  $x$  un développement  
 de la forme:

$$x = Ay^m + By^{m+1} + \dots \quad A \neq 0 \quad m \geq 2.$$

d'où l'on ne peut pas tirer une fonction holomorphe  $y$  de  $x$   
 comme quand  $m=1$ . On a:  $x = y^m(A + By + \dots)$

$$\sqrt[m]{x} = y \sqrt[m]{A + By + \dots}$$

La quantité soumise au radical est une fonction holomorphe de  $y$ .

On a donc:  $x' = \alpha y + \beta y^2 + \dots \quad \alpha \neq 0.$

$y$  est donc une fonction holomorphe de  $x'$ , et par suite une fonction  
 holomorphe de  $\sqrt[m]{x}$ . Il y aura  $m$  valeurs de  $y$  pour  $x=0$ ,  
 correspondant aux  $m$  déterminations de  $\sqrt[m]{x}$ . Ainsi le point  
 $x=0$  est un point critique algébrique de la fonction  $y$ : c'est-à-dire  
 que cette fonction  $y$  prend un nombre fini de valeurs distinctes  
 quand le point  $x$  tourne autour de 0.

Les solutions de l'équation différentielle (1) sont donc des fonctions  
 holomorphes de  $\sqrt[m]{x}$ , ( $m \geq 2$ ) - C'est d'ailleurs  
 assuré, avec ce mode de démonstration, qu'il y a toutes les  
 solutions de l'équation.

On a vu plus haut (page 114) que l'inversion de l'intégrale elliptique  
 donne naissance à une fonction uniforme de  $x$ . Considérons une  
 équation analogue à celle qui engendre l'intégrale elliptique, mais  
 où le polynôme en  $u$  est du 6<sup>e</sup> degré:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = Au^6 + Bu^5 + Cu^4 + Du^3 + Eu^2 + Fu + G$$



et demandons nous si  $u$  est une fonction uniforme de  $z$ , comme dans le cas d'un polynôme du 4<sup>e</sup> degré, c'est-à-dire l'intégrale de

$$z = \int \frac{du}{\sqrt{Au^6 + Bu^5 + \dots}}$$

d'une fonction uniforme. — On peut écrire :

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = A(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)(u-e)(u-f)$$

Comme pour l'intégrale elliptique, on étudiera la fonction  $u$  au voisinage de chaque pôle en posant :

$$u = a + v^2$$

et la même démonstration s'appliquera ici.

Pour le cas où  $u$  tend vers l'infini, on posera :  $u = \frac{1}{v}$

$$\frac{du}{dz} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dz} = \sqrt{\frac{A}{v^6} (1-av)(1-bv) \dots (1-fv)}$$

$$\text{d'où : } -\frac{dv}{dz} = \sqrt{A + Bv + \dots}$$

La quantité soumise au radical est fonction holomorphe de  $v$  au voisinage de  $v=0$  ( $u=\infty$ ) et par conséquent chaque détermination du radical est aussi holomorphe. Mais  $v$  s'annulera pour une certaine valeur de  $z$ , donc ce ne sera pas une fonction <sup>non</sup> uniforme de  $z$ , et elle aura cette valeur pour point critique algébrique.

Or il y a nécessairement des valeurs finies de  $z$  qui annulent  $v$  c'est-à-dire qui rendent  $u$  infinie, car pour  $u=\infty$ ,  $z$  reste fini (intégrale de 6<sup>e</sup> espèce).  $z$  tend vers  $\int \frac{du}{u^3}$ .

Ainsi ce n'est que dans le cas d'un polynôme du 4<sup>e</sup> degré que  $u$  est fonction uniforme de  $z$  et cette propriété tient à ce fait particulier que le degré étant 4, le facteur  $v^2$  disparaît. Mais



cela n'a plus lieu au-delà du 10<sup>e</sup> degré.

— Revenons à l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Supposons, pour prendre un cas simple (qui n'est pas le plus général), que  $f(x, y)$  est une fonction rationnelle. Cherchons si elle peut avoir des points d'indétermination, nous entendons des points fixes, indépendants de l'intégrale  $y$  que l'on a choisie. On peut écrire:

$$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

$P$  et  $Q$  étant des polynômes entiers premiers entre eux.

Il peut y avoir dans  $Q$  des facteurs qui ne contiennent que  $x$ , et qui par conséquent s'annulent quel que soit  $y$ ; marquons les points du plan qui annulent ces facteurs; ce sont des pôles fixes de  $f(x, y)$ ; nous les éviterons, et nous isolerons en facteur le polynôme  $\varphi(x)$  formé de tous ces facteurs (ayant pour racines tous ces pôles). — Parmi les valeurs qui annulent  $Q(x, y)$ , abstraction faite de  $\varphi(x)$ , quelques-unes, en nombre limité, peuvent annuler aussi  $P(x, y)$ ; marquons encore ces points fixes et évitons-les. — Les autres valeurs qui rendent  $f$  infini sont celles qui annulent  $Q$  seul; ces valeurs de  $y$  dépendent de  $x$ ; appelons-les:  $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$ ; joignons- $y$ :  $y = \infty$ , si  $Q$  est d'un degré inférieur à  $P$  en  $y$ .

Cela posé, partons d'un point  $x_0$  et allons en un point  $x$  du plan par un certain chemin; la fonction  $y$  prendra en  $x$  une valeur déterminée. Pour qu'on fût arrêté en un point  $x_1$ , c'est pour que  $y$  devint indéterminée en ce point, il faudrait qu'on rencontrât un des pôles ou points critiques algébriques de la fonction  $f(x, y)$ , que



nous évitons par hypothèse. Pour qu'on s'en fût arrêté, il faudrait que les rayons des cercles au moyen desquels on s'approche en proche la fonction le long du chemin suivi (cf pages 112-116) tendissent vers zéro, c'est-à-dire que pour  $x = x_1$ ,  $y$  tendit vers une des valeurs:

$$\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x) \text{ ou } \infty$$

car  $y$  ne peut être indéterminée, et doit tendre vers une limite; et puisqu'on évite les pôles et points critiques, la fonction  $f$  ne peut plus devenir infinie que pour ces valeurs de  $y$ . Mais, si près qu'on soit du point  $x_1$ , on pourra toujours faire que  $y$  diffère de l'une de ces valeurs:  $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$  et  $\infty$

d'une quantité finie, puisque c'est une intégrale dont la valeur initiale est arbitraire, et par conséquent le rayon de convergence ne deviendra jamais infiniment petit. Ainsi, si l'on évite les pôles et points critiques algébriques, on ne rencontrera aucun point d'indtermination; donc la fonction  $f(x, y)$  n'a que des points d'indtermination fixes, qui sont ses pôles et points critiques algébriques.

Ce qui fait l'intérêt de cette proposition, c'est qu'elle est vraie que pour les équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre; en effet (les équations d'ordre supérieur au 1<sup>er</sup>, comme:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y)$$

la fonction  $f$  a des points d'indtermination qui dépendent de l'intégrale  $y$ .

Il peut arriver qu'en prolongeant analytiquement la fonction rationnelle  $f(x, y)$ , on rencontre dans le plan des points où elle n'est plus holomorphe sans pour cela devenir infinie. Supposons par exemple qu'elle devienne indéterminée en un point  $(x_0, y_0)$  nous pouvons



toujours faire :  $x_0 = 0, y_0 = 0$ . La fonction  $f$  prendra la forme d'un quotient de 2 polynômes qui s'annulent pour  $x=0, y=0$  :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+\dots\dots}{a_1x+b_1y+\dots\dots}$$

Nous allons chercher les intégrales de cette équation qui se réduisent à 0 pour  $x=0$ .

Nous examinerons d'abord le cas particulier, étudié par Briot et Bouquet, où le dénominateur se réduit à  $x$  : on a :

$$x \frac{dy}{dx} = ax+by+\dots\dots$$

On va démontrer que si  $b$  n'est pas un entier positif, cette équation a une intégrale holomorphe qui s'annule pour  $x=0$ .

Ecrivons-la :  $x \frac{dy}{dx} - by = ax + \varphi_2(x, y)$

$\varphi_2$  contenant des termes du 2<sup>e</sup> degré au moins. En différentiant  $n$  fois, on aura les dérivées successives de  $y$  par rapport à  $x$  pour  $x=0, y=0$  : tous les termes ayant  $x$  ou  $y$  en facteur disparaissent :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)(1-b) = a \quad 1-b \neq 0.$$

et en général :  $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)(n-b) = 0 \quad n-b \neq 0.$

Grâce à l'hypothèse faite sur  $b$ , on ne sera jamais arrêté dans ces dérivations. Mais si  $b$  était un nombre entier  $n$ , le 1<sup>er</sup> membre deviendrait identiquement nul, et l'on aurait une relation entre les divers coefficients qui figurent dans le développement de  $y$  en série de Taylor. On pourra donc obtenir le développement de  $y$  en série de Taylor, et le prolonger aussi loin qu'on voudra. Reste à prouver qu'il est



convergent; pour cela, nous emploierons encore la méthode de comparaison. Soit  $\omega$  le minimum du module de  $(n-b)$ :

$|n-b| \geq \omega > 0$  et  $M$  le maximum du module de  $f$  quand  $x$  est dans un cercle de rayon  $\rho$ ,  $y$  de un cercle de ray.  $\underline{r}$ . Prenons, au lieu de:

$$\frac{M}{(1-\frac{x}{\rho})(1-\frac{y}{r})}$$

une fonction ayant les mêmes dérivées, mais s'annulant pour  $x=0$ ,  $y=0$ , et n'ayant pas de terme du 1<sup>er</sup> degré en  $y$ ; c.à.d. retranchons à la fonction précédente son terme constant et son terme en  $y$ ; et posons:

$$\omega Y = \frac{M}{(1-\frac{x}{\rho})(1-\frac{y}{r})} - M - \frac{My}{r}$$

Les dérivées de cette fonction sont toutes positives, et supérieures en valeur absolue aux dérivées correspondantes de  $(x \frac{dy}{dx} - by)$ .

Remarquons que l'équation de comparaison est ici une équation algébrique, et non une équation différentielle.

Comme ~~la fonction~~ est holomorphe en  $x$  et  $Y$  à l'intérieur de deux cercles, et que sa dérivée par rapport à  $Y$  ( $\omega > 0$ ) est différente de 0, cette équation définit une fonction implicite  $Y$  de  $x$ . D'ailleurs tous les coefficients, dans le développement du 2<sup>e</sup> membre, sont réels et positifs; donc les dérivées successives,  $\omega \frac{dY}{dx}$ ,  $\omega \frac{d^2Y}{dx^2}$ , ..... du 1<sup>er</sup> membre sont toutes positives.

$Y$  sera une fonction holomorphe convergente dans un certain cercle autour de  $x=0$ . — Si maintenant on compare ce développement à celui de  $(x \frac{dy}{dx} - by)$ , on voit que tous les coefficients sont plus grands en valeur absolue que ceux de celui-ci. On a



dans les  $1^{\text{er}}$  membres différentiels  $n$  fois:  $|n-b| > \omega$   
 donc, en divisant par  $\omega$  le 2<sup>e</sup> membre, on augmente à chaque  
 division successive le module du coefficient de  $y$ . La convergence  
 du développement de  $y$  est donc bien établie, à la condition  
 que  $b$  ne soit pas un entier.

On peut se demander s'il y a d'autres intégrales s'annulant pour  
 $x=0$ , outre cette intégrale holomorphe que nous venons de trouver.  
 Nous traiterons cette question dans le cas général; Toutefois, on peut  
 prouver que si la partie réelle de  $b$  est négative, il n'y a pas d'autres  
 intégrales s'annulant pour  $x=0$ , sous certaines conditions imposées  
 au chemin par lequel  $x$  tend vers 0.

Nous venons de prouver l'existence de l'intégrale holomorphe  $y_1$ ;  
 supposons que l'équation admette une autre intégrale:  $y_2 + y_1$ ;  
 on aura:

$$x \left( \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \right) = ax + b(y_1 + y_2) + \dots$$

d'où:  $x \frac{dy}{dx} = y(b + \varphi(x, y))$   $\varphi(0, 0) = 0$ .

Par hypothèse, cette nouvelle équation doit avoir une intégrale  
 qui s'annule pour  $x=0$ , car on doit avoir:  $y_2 + y_1 = y_1 = 0$   
 (pour  $x=0$ ).

Ecrivons le 2<sup>e</sup> membre sous une forme différentielle, (pour  $x=0$ )  
 par un groupement de termes. Isolons à  $b$  tous les termes qui  
 ne contiennent que  $y$  dans  $\varphi(x, y)$ , soit:  $P(y)$  ( $P(0)=0$ )

Les autres termes contenant  $x$  au 1<sup>er</sup> degré au moins, on peut  
 les écrire:  $xQ(x, y)$   $Q$  holomorphe en  $x, y$ .

On a ainsi:  $x \frac{dy}{dx} = by(1+P) + xyQ$   $[1+P(y)] \geq 0$   
pour  $x=0$ .  
 $y=0$ .



Divisons les 2 membres par :

$$xy[1+P(y)]$$

$$\frac{dy}{y(1+P)} = b \frac{dx}{x} + \frac{Q(x,y)}{1+P(y)} dx$$

Potons :

$$\frac{Q(x,y)}{1+P(y)} = \psi(x,y)$$

fonction holomorphe en  $x$ ; et :

$$\frac{1}{y[1+P(y)]} = \frac{1}{y} + w(y)$$

L'équation devient :

$$\frac{dy}{y} + w(y) dy = b \frac{dx}{x} + \psi(x,y) dx$$

Intégrons :

$$\log \frac{y}{y_0} + \int_{x_0}^x w(y) dy = \log \left( \frac{x}{x_0} \right)^b + \int_{x_0}^x \psi(x,y) dx$$

$$\text{d'où : } \frac{y}{y_0} e^{F(y)} = \left( \frac{x}{x_0} \right)^b e^{\int_{x_0}^x \psi(x,y) dx} \quad F(y) = \int_{x_0}^x w(y) dy$$

Or cette égalité est impossible, car, les 2 exponentielles restant finies,  $\frac{y}{y_0}$  tend vers 0, tandis que  $\left( \frac{x}{x_0} \right)^b$  augmente indéfiniment, parce que  $b$  a sa partie <sup>réelle</sup> négative, et que  $x$  tend vers 0. Seulement  $x$  doit tendre vers 0 de telle sorte que son argument  $\theta$  reste compris entre des limites finies. Cherchons en effet à quelle condition  $x^b$  tendra vers  $\infty$  en même temps que  $x$  : posons :

$$x = re^{i\theta} \quad b = \alpha + i\beta \quad (\alpha < 0)$$

$$x^b = e^{b \log x} = e^{(\alpha + i\beta)(\log r + i\theta)} = e^{\alpha \log r - \beta \theta} \times e^{i(\alpha \theta + \beta \log r)}$$

$$|x^b| = e^{\alpha \log r - \beta \theta} \quad \text{tendra vers } \infty \text{ si } (\alpha \log r - \beta \theta) \text{ tend vers } +\infty.$$

Or  $\alpha \log r > 0$  dès que  $|x| < 1$ , et  $\alpha \log r$  croît indéfiniment. Mais si  $\theta$  augmente aussi indéfiniment de telle sorte



que  $\beta\theta$  tende vers  $+\infty$ ,  $|x^b|$  pourra avoir une limite finie et même nulle. Supposons par exemple  $\beta$  positif et prenons :

$\log r = -\sqrt{\theta}$  qui donne la courbe:  $r = e^{-\sqrt{\theta}}$

$r$  tend vers 0 quand  $\theta$  augmente indéfiniment, ce qui engendre une spirale ayant pour point asymptote l'origine; on aura:

$|x^b| = e^{-\alpha\sqrt{\theta} - \beta\theta}$   $\alpha\sqrt{\theta} < 0$   $\beta\theta > 0$ .

Quand  $\theta$  augmente indéfiniment,  $\beta\theta$  l'emporte sur  $\alpha\sqrt{\theta}$ , et  $|x^b|$  tend vers 0, le rapport de  $e$  tendant vers  $-\infty$ .

Alors l'intégrale de l'équation proposée tendra aussi vers 0:

$x \frac{dy}{dx} - by = 0$   $\frac{dy}{y} = b \frac{dx}{x}$   $y = Cx^b$

On peut donc obtenir une intégrale qui s'annule pour  $x=0$ , en faisant suivre à  $x$  une infinité de chemins ~~infinis~~ tendant vers 0 comme la spirale précédente, par une infinité de tours.

Ainsi la restriction apportée à la nature du chemin parcouru par  $x$  est ici indispensable, parce qu'elle est inhérente à la question, et non introduite par la démonstration (cf. page 107.)

Nous n'examinerons pas le cas où  $b$  aurait sa partie positive:  $\alpha > 0$ . Voyons seulement ce qui arrive dans le cas particulier

où:  $\alpha = 0$ ,  $b = 1$ :  $x \frac{dy}{dx} = y + 1$

Posons:  $y = \lambda x$  On ramène ainsi l'équation à

la forme générale:  $x(\lambda + x \frac{d\lambda}{dx}) = \lambda x + x^2 [ \dots ]$

$\frac{d\lambda}{dx} = \varphi(\lambda, x)$

$\varphi$  fonction holomorphe de  $\lambda$  et de  $x$ ;



Comme  $\lambda$  est arbitraire, il y a une infinité d'intégrales holomorphes de cette équation, et par conséquent autant de solutions pour  $y$ : car on peut se donner à volonté le 1<sup>er</sup> terme (constant) du développement de  $\lambda$ .

Revenons à l'équation générale :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + \dots}{a_1x + b_1y + \dots}$$

On suppose qu'il n'y a pas de relation particulière entre les coefficients. Réduisons les termes du 1<sup>er</sup> degré tant en  $y$  dans le numérateur, tant en  $x$  dans le dénominateur. Pour cela, posons :

$$x = \alpha X + \beta Y$$

$$y = \gamma X + \delta Y$$

Par ce changement de variables, on peut ramener l'équation à la forme demandée :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\lambda_2 Y + \dots}{\lambda_1 X + \dots}$$

Substituons ces expressions dans l'équation primitive et passons les dénominateurs :

$$[a_1(\alpha X + \beta Y) + b_1(\gamma X + \delta Y) + \dots](\gamma dX + \delta dY) - [a(\alpha X + \beta Y) + b(\gamma X + \delta Y) + \dots](\alpha dX + \beta dY) = 0$$

Car le coefficient de  $dX$  doit figurer seulement  $Y$ , dans celui de  $dY$  seulement  $X$ ; égalons à 0 les coefficients de  $X dX$ ,  $Y dY$  :

$$(a_1\alpha + b_1\gamma)\gamma - (a\alpha + b\gamma)\alpha = 0$$

$$(a_1\beta + b_1\delta)\delta - (a\beta + b\delta)\beta = 0$$

Ces 2 équations entre  $\beta$  et  $\delta$ , d'une part,  $\alpha$  et  $\gamma$  d'autre, sont identiques : on aura donc les valeurs des 2 rapports  $\frac{\alpha}{\gamma}$ ,  $\frac{\beta}{\delta}$ , par une même équation du 2<sup>e</sup> degré. Si elle a ses racines inégales,



on prendra  $\frac{\alpha}{\gamma}$  pour  $\frac{\alpha}{\gamma}$ , l'autre pour  $\frac{\beta}{\delta}$ , car le déterminant fonctionnel de la transformation  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$  ne doit pas être nul;

$$\frac{\alpha}{\gamma} \neq \frac{\beta}{\delta}$$

D'ailleurs l'équation ne peut pas avoir ses racines égales, ce qui supposerait une relation entre les coefficients. On aura donc 2 valeurs distinctes pour  $\frac{\alpha}{\gamma}$  et  $\frac{\beta}{\delta}$ .

On est ainsi ramené à étudier une équation de la forme:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_2 y}{\lambda_1 x}$$

Cherchons quelle est la forme de l'intégrale générale de cette équation dans le voisinage du point  $x=0, y=0$ .

Cette intégrale sera:

$$f(x, y) = C$$

la fonction  $f$  vérifiant l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial f}{\partial x} (\lambda_1 x + \dots) + \frac{\partial f}{\partial y} (\lambda_2 y + \dots) = 0$$

Cette équation admet une infinité de solutions, puisqu'on peut ajouter une constante à  $f$ . Nous allons chercher une forme particulière de l'intégrale  $f$ . Il n'y a pas, d'ailleurs, d'intégrale holomorphe de cette équation, si ce n'est la solution inéquivalente:

$$f=0.$$

Considérons l'équation suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial x} [\lambda_1 x + \dots] + \frac{\partial u}{\partial y} [\lambda_2 y + \dots] = \lambda_1 u,$$

Elle admet une intégrale holomorphe qui s'annule pour  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$  si le quotient  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  n'est pas un nombre réel négatif.



Considérons aussi l'équation toute semblable:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} [\lambda_1 x + \dots] + \frac{\partial u_2}{\partial y} [\lambda_2 y + \dots] = \lambda_2 u_2$$

Sous la même condition, elle aura une intégrale holomorphe s'annulant pour  $x=0, y=0$ ; Soient  $u_1(x, y), u_2(x, y)$  ces 2 intégrales.

On peut avec ces 2 fonctions composer une solution de l'équation proposée. Multiplions l'équation en  $u_2$  par  $\lambda_1 u_1^{\lambda_2-1} u_2^{\lambda_1-1}$ ,

l'équation en  $u_1$  par  $\lambda_2 u_1^{\lambda_2-1} u_2^{\lambda_1}$ , et retranchons-les: les 2<sup>es</sup> membres disparaissent, et l'on trouve:

$$\lambda_2 u_1^{\lambda_2-1} u_2^{\lambda_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \lambda_1 u_1^{\lambda_2} u_2^{\lambda_1-1} \frac{\partial u_2}{\partial x} = D_x \left( \frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}} \right) \times u_2^{2\lambda_1}$$

$$[\lambda_1 x + \dots] D_x \left( \frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}} \right) + [\lambda_2 y + \dots] D_y \left( \frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}} \right) = 0$$

Ce qui montre que  $\frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}}$  est une solution de l'équation aux dérivées partielles en  $x, y$ ,  $u_1, u_2$  étant des fonctions holomorphes au voisinage de  $x=0, y=0$ . On aura l'intégrale générale de l'équation différentielle en égalant à une constante le quotient:

$$\frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}} = \text{constante}$$

On peut remarquer que l'existence et la nature des intégrales dépendent, dans ces questions, du caractère et de la valeur numériques, non plus même des exposants (comme page 128) mais des coefficients, ce qui fait intervenir les considérations arithmétiques dès qu'on approfondit la théorie des équations différentielles.



139

Nous avons à démontrer la proposition invoquée ci-dessus,  
à savoir que l'équation aux dérivées partielles:

$$\left[ \lambda_1 x + \dots \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \left[ \lambda_2 y + \dots \right] \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda_1 u$$

a pour solution une intégrale holomorphe qui s'annule pour  
 $x=0, y=0$ . Cherchons à quelles conditions les dérivées partielles  
de cette solution  $u$  seront déterminées pour  $x=0, y=0$ .

Preons la dérivée partielle par rapport à  $x$  de l'équation précé-  
dente, et faisons :  $x=0, y=0$ , ma:  $\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x}$

Donc  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{00}$  est indéterminée - La dérivée par rapport à  $y$   
est :  $\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  Donc :  $\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{00} = 0$ .

Ainsi, si l'on se donne arbitrairement la valeur de  $\frac{\partial u}{\partial x}$   
pour  $x=0, y=0$ , on aura pour toutes les dérivées partielles  
successives des valeurs déterminées. En effet, une dérivée d'ordre  
quelconque (pour  $x=0, y=0$ ) ne peut provenir que des termes :

$$\lambda_1 x \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lambda_2 y \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \lambda_1 u.$$

Dérivons  $n$  fois l'équation par rapport à  $x$ :

$$\dots + \lambda_1 n \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + \lambda_2 y \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^n \partial y} = \lambda_1 \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + \dots$$

puis  $p$  fois par rapport à  $y$ :

$$\dots + \lambda_1 n \frac{\partial^{n+p} u}{\partial x^n \partial y^p} + \lambda_2 p \frac{\partial^{n+p} u}{\partial x^n \partial y^p} = \lambda_1 \frac{\partial^{n+p} u}{\partial x^n \partial y^p} + \dots$$

Le coefficient de  $\frac{\partial^{n+p} u}{\partial x^n \partial y^p}$  sera donc :  $\lambda_1 (n-1) + \lambda_2 p$



et s'il n'est pas nul, on aura pour la dérivée une valeur déterminée. Donc toutes les dérivées partielles successives (une fois  $(\frac{\partial u}{\partial x})_{x_0}$  choisie arbitrairement) seront déterminées pourvu que le coefficient :

$\lambda_1(n-1) + \lambda_2 p$  ne s'annule pour aucun système de valeurs entières, attribués à  $n$  et  $p$ . ( $n \geq 1$ )

On voit d'abord que le rapport,  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  est un aginaire, le coefficient ne peut s'annuler. Il reste à examiner les valeurs réelles qu'il peut prendre. — Or si  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  est positif, le coefficient ne peut s'annuler, à moins que  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  ne soit un nombre entier  $q$ , auquel cas, pour  $n=0$ ,  $p=q$ , le coefficient serait nul.

Donc  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  peut être positif, mais non entier : dans ce condition, le coefficient non seulement ne s'annule pas, mais reste fini.

Si au contraire  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  est négatif, le coefficient pourra devenir aussi petit qu'on voudra, car on peut prendre des entières positives  $n$  et  $p$  suffisamment grandes pour que le rapport :  $-\frac{p}{n-1}$  soit aussi voisin qu'on voudra de  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ , et par conséquent le coefficient soit aussi voisin qu'on voudra de 0 ; il pourra même être rendu rigoureusement nul si  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  est commensurable.

En résumé, nous excluons donc les 2 hypothèses :  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  négatif et  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  entier positif. Sous ces conditions, nous allons démontrer le théorème annoncé.

Pour cela, nous poserons d'abord

$$u = Ax + v$$

Par ce changement de variable, on a l'équation transformée en  $v$  :



141

$$\left[ \lambda_1 x + \dots \right] \frac{\partial V}{\partial x} + \left[ \lambda_2 y + \dots \right] \frac{\partial V}{\partial y} = \lambda_1 (Ax + y) - \left[ \lambda_1 x + \dots \right] A$$

$$= \lambda_1 y - A \left[ w_2(x, y) \right]$$

$w_2$  étant un ensemble de termes du 2<sup>e</sup> degré au moins en  $x, y$

$$\lambda_1 x \frac{\partial V}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial V}{\partial y} - \lambda_1 y = \varphi_2 \frac{\partial V}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial V}{\partial y} + \chi_2 \quad (1)$$

Le 2<sup>e</sup> membre de cette équation est du 2<sup>e</sup> degré (minimum) en  $x, y$ .

On va démontrer que la fonction  $V$ , solution de cette équation, a un développement convergent.

Nous emploierons toujours la même méthode (calcul des limites).  
 Nous remplacerons  $\varphi_2, \psi_2, \chi_2$  par une fonction de comparaison de la forme :

$$\frac{M}{1 - \frac{x+y}{\varepsilon}} \quad M \text{ étant le module maximum de } \varphi_2, \psi_2, \chi_2 \text{ dans le cercle } \varepsilon.$$

Nous pouvons, pour simplifier, supposer  $\varepsilon = 1$ ; de plus, pour rendre les fonctions comparables, retranchons de la fonction de comparaison les termes du 1<sup>er</sup> degré; elle aura la forme définitive:

$$\frac{M}{1 - x - y} - M - Mx - My$$

À  $\lambda_1, \lambda_2$  nous substituerons une quantité positive  $\varepsilon$ ; on a l'équation de comparaison:

$$\varepsilon x \frac{\partial V}{\partial x} + \varepsilon y \frac{\partial V}{\partial y} - \varepsilon V = \left[ \frac{M}{1 - x - y} - M - Mx - My \right] \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + 1 \right) \quad (2)$$

définissant la fonction  $V$ .

Le coefficient de la dérivée générale:  $\frac{\partial^{n+p} u}{\partial x^n \partial y^p}$  était:

$$\lambda_1 (n-1) + \lambda_2 p$$

Il sera pour la nouvelle fonction (contenue dans  $V$ ):

$$\varepsilon (n-1) + \varepsilon p.$$



142  
Or on peut prendre  $\varepsilon$  assez petit pour que :

$$|\varepsilon(n-1+p)| < |\lambda_1(n-1) + \lambda_2 p|$$

En effet, la fraction : 
$$\frac{\lambda_1(n-1) + \lambda_2 p}{n-1+p}$$

quand on donne à  $n$  et  $p$  toutes les valeurs positives entières, passe par une valeur minimum  $a$  qui n'est ni nulle ni infiniment petite, car le numérateur reste fini, grâce aux hypothèses restrictives que nous avons faites sur  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ . On pourra donc prendre pour  $\varepsilon$  le minimum de cette fraction.

Alors chaque dérivée de la fonction  $V$  sera plus grande que la dérivée correspondante de  $\delta$ , et de plus sera positive, car chaque coefficient est plus petit en valeur absolue, et comme les coefficients des dérivées de  $V$  sont tous positifs, l'inégalité n'a pu que se maintenir, et même augmenter dans le même sens, entre les dérivées correspondantes. La fonction  $V$  remplit donc bien les conditions d'une fonction de comparaison.

Reste à étudier l'équation (2) pour savoir si son intégrale  $V$  est holomorphe. Divisons par  $\varepsilon$  et posons :  $M' = \frac{M}{\varepsilon}$  :

Considérons  $V$  comme fonction de  $(x+y) = z$  : l'éq (2) devient :

$$z \frac{\partial V}{\partial z} - V = \left( \frac{M'}{1-z} - M' - M'z \right) \left( 2 \frac{\partial V}{\partial z} + 1 \right) \quad \left( \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

Comme on veut que  $\left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)_0 = 0$  comme :  $\left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)_0 = 0$

la dérivée de  $V$  par rapport à  $z$  doit être nulle pour  $z=0$ .

Or l'équation précédente est de la forme précédemment étudiée (p. 135) :

$$x \frac{dy}{dx} = ax + by + \dots$$



et l'on sait que si:  $b=1, a=0$ , en posant:  $y=\lambda x$ ,  
 on a une infinité de solutions holomorphes pour  $\lambda$ , et par suite  
 pour  $y$ . — L'équation (2) peut en effet s'écrire:

$$z \frac{\partial V}{\partial z} = V + \left( 2 \frac{\partial V}{\partial z} + 1 \right) M' \left[ \frac{1}{1-z} - (1+z) \right] \left[ \frac{z^2}{1-z} \right]$$

Or le crochet développé, commençant par un terme du 2<sup>e</sup> degré;  
 cette équation rentre bien dans le type précédent et admet une  
 infinité de solutions holomorphes  $V$  s'annulant pour  $z=0$ :

$V(0) = 0$ . — Mais comme on veut de plus que:

$\left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_0 = 0$ , cette nouvelle condition en détermine une seule.

Nous avons donc une intégrale parfaitement déterminée  $V(z)$   
 au voisinage de  $z=0$ . Il est donc démontré que l'équation:

$$\left( \lambda_1 x + \dots \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left( \lambda_2 y + \dots \right) \frac{\partial u_1}{\partial y} = \lambda_1 u_1$$

admet une intégrale holomorphe qui s'annule pour  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$   
 et dont la dérivée  $\left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_{00}$  prend une valeur arbitraire.

Les mêmes raisonnements s'appliqueraient à l'équation:

$$\left( \lambda_1 x + \dots \right) \frac{\partial u_2}{\partial x} + \left( \lambda_2 y + \dots \right) \frac{\partial u_2}{\partial y} = \lambda_2 u_2$$

Elle admet une intégrale holomorphe  $u_2$  s'annulant pour  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$   
 et dont la dérivée  $\left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)_{00}$  prend une valeur arbitraire, à  
 la condition qu'on exclue les 2 hypothèses:  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  négatif et:  
 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  entier positif. La condition totale de ce double résultat  
 exclut donc:  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  négatif et  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  positif, entier ou inverse d'entier.



Pour ces restrictions, on aura les résultats annoncés (p. 138); le quotient:  $\frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}}$  sera une solution de l'équation:

$$\frac{\partial f}{\partial x} [\lambda_1 x + \dots] + \frac{\partial f}{\partial y} [\lambda_2 y + \dots] = 0$$

et l'intégrale générale de l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_2 y + \dots}{\lambda_1 x + \dots}$$

sera donnée par la formule:

$$u_1^{\lambda_2} = C u_2^{\lambda_1}$$

$u_1, u_2$  étant les solutions définies précédemment, s'annulant pour  $x=0, y=0$ , et telles qu'on puisse choisir arbitrairement les valeurs de  $\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}$  pour  $x=0, y=0$ .

Examinons le cas particulier:

$$x \frac{dy}{dx} = ax + by + \dots$$

Priest et Bouquet ont montré que si  $b$  a sa partie réelle positive, cette équation admet une infinité d'intégrales autres que l'intégrale holomorphe, et prenant une même valeur initiale. Nous allons le démontrer en nous appuyant sur les conclusions précédentes. Pour cela, ramè nons l'équation à la forme canonique.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_2 y + \dots}{\lambda_1 x + \dots}$$

$$\text{or on a: } \frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + \dots}{x}$$

Il s'agit d'annuler le coefficient  $a$ . Posons:

$$y = ax + Y$$

$$x \left( a + \frac{dY}{dx} \right) = (a + b\alpha)x + bY + \dots$$

Supposons  $b \neq 1$ ;

$$\text{faisons: } \alpha = a + b\alpha, \quad \text{c'est-à-dire: } \alpha = \frac{a}{1-b}$$

L'équation devient:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{bY + \dots}{x}$$



145

Nous n'aurons qu'à faire dans les formules:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = b$ :

$$x \frac{\partial u_1}{\partial x} + [bY + \dots] \frac{\partial u_1}{\partial Y} = u_1, \quad x \frac{\partial u_2}{\partial x} + [bY + \dots] \frac{\partial u_2}{\partial Y} = bu_2$$

La 1<sup>re</sup> équation admet la solution:  $u_1 = x$

La 2<sup>e</sup> donnera une solution  $u_2$ , fonction holomorphe en  $x, Y$ .

On aura donc:  $u_2(x, Y) = Cx^b$

Telle est la forme de l'intégrale générale. Si, suivant l'hypothèse, la partie réelle de  $b$  est positive,  $x^b$  tendra vers 0 avec  $x$ ; on aura donc:

$$u_2(0, Y) = 0$$

et l'équation précédente donnera une infinité d'intégrales s'accumulant pour  $x=0$ , correspondant à l'infinité des valeurs arbitraires qu'on peut assigner à  $C$ .  $Y$  est définie par cette équation comme fonction holomorphe de  $x$  et  $x^b$ .

Si au contraire  $b$  avait sa partie réelle négative, cette conclusion ne serait plus vraie. Toutefois,  $x^b$  pourrait encore tendre vers 0 avec  $x$ , comme nous l'avons expliqué (page 134) en suivant un chemin infini faisant une infinité de tours autour du point asymptotique 0. (voir note, page 150)

Inversement, le cas que nous venons de traiter:

$$x \frac{dy}{dx} = ax + by + \dots$$

peut être considéré comme le cas général auquel on peut ramener le cas particulier:  $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + \dots}{a_1x + b_1y + \dots}$  (page 130)

Pour cela, posons:  $\frac{y}{x} = t. \quad y = tx.$



La 2<sup>e</sup> équation devient:  $x \frac{dx}{dt} + t = \frac{a+bt+x}{a+bt+x} - t$

ou:  $x \frac{dx}{dt} = \frac{a+bt+x}{a+bt+x} - t$

Pour  $x=0, y=0$ , le 2<sup>e</sup> membre doit être nul:  $\frac{a+bt}{a+bt} - t = 0$ .

Cette équation aura en général 2 racines distinctes,  $t_1, t_2$  (en supposant qu'il n'y a aucune relation entre les coefficients). Alors  $t$  pourra tendre vers chacun d'eux. Dans le voisinage du système  $x=0, t=t_1$ , on aura un développement holomorphe pour  $x \frac{dx}{dt}$ ; on en aura un autre dans le voisinage de:  $x=0, t=t_2$ .

On aura donc 2 équations différentielles de la forme cherchée:

$$x \frac{dy}{dx} = ax + by + \dots$$

Seulement, il n'est pas démontré que  $t$  doive nécessairement tendre vers  $t_1$  ou  $t_2$ . Il est certain que  $t$  ne peut avoir une limite différente de  $t_1, t_2$ , quand  $x$  tend vers 0. En effet,

$$x \frac{dx}{dt} = \varphi(t, x)$$

$\varphi$  holomorphe en  $t, x$

Supposons que cette équation admette une intégrale qui pour  $x=0$ , prendrait la valeur  $t_3$  (différente de  $t_1$  et de  $t_2$ ); on aurait:

$$\varphi(t_3, 0) \neq 0$$

ce qui est impossible.

En effet, on a  $x$  en fonction de  $t$  par un certain développement;  $x$  doit s'annuler pour  $t=t_3$ , ainsi que toutes ses dérivées. Tous les coefficients du développement de  $x$  s'annulent pour  $t=t_3$ , il n'y a pas de fonction  $x$  de  $t$ , ni de fonction  $t$  de  $x$  prenant



pour  $x=0$  la valeur  $t_3$ .

Dans tous les cas où l'intégrale générale pourra prendre la forme:

$$u_1^{\lambda_2} = C u_2^{\lambda_1} \quad \text{ou pourra rechercher s'il y a}$$

une intégrale sans que  $t = \frac{y}{x}$  ait une limite déterminée.

Or cela ne se peut quand  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  est réel et négatif; mais dans ce cas, on peut démontrer un théorème relatif à cette question.

Mettre d'abord l'équation sous la forme canonique:

$$x \frac{dt}{dx} + t = \frac{\lambda_2 t + x(\quad)}{\lambda_1 + x(\quad)} \quad x \frac{dt}{dx} = \frac{\lambda_2 t + x(\quad)}{\lambda_1 + x(\quad)} - t$$

L'équation qui a pour racines  $t_1, t_2$  se réduit au 1<sup>er</sup> degré:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) t = 0$$

Elle admet les solutions:

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = \infty$$

$$(\lambda_2 \geq \lambda_1)$$

On a 2 intégrales holomorphes de l'équation:

$$x \frac{dt}{dx} = \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right) t + \dots$$

se réduisant respectivement à 0 et à  $\infty$  pour  $x=0$ .  
 La 1<sup>re</sup>, qui s'annule pour  $x=0$ , donne une fonction  $y$  holomorphe en  $x$ ; et inversement, on a une fonction  $x$  holomorphe en  $y$  s'annulant pour  $y=0$ . La 2<sup>e</sup> ( $t_2 = \infty$  pour  $x=0$ ) ne donne pas une solution holomorphe: car  $y$  commence par un terme en  $x^2$ , et a une point critique algébrique comme  $\sqrt{x^2}$ .  
 Reste à savoir s'il n'y a pas d'autres intégrales pour lesquelles  $t$  n'a aucune limite déterminée.



On peut démontrer que si  $x$  et  $y$  ont des variations représentées dans deux plans respectifs par des courbes de longueur finie, il n'y a pas d'autre intégrale que celles qui se réduisent à  $t$  et  $t^2$  pour  $x=0$ . (Nous nous contentons d'énoncer ce théorème.)

— Remarque sur la réduction à la forme canonique. — Selon de la transformation employée (page 136), posons les formules suivantes, résolues par rapport aux nouvelles variables:

$$X = \alpha x + \beta y$$

$$Y = \gamma x + \delta y$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\gamma dx + \delta dy}{\alpha dx + \beta dy} = \frac{\gamma(\alpha x + \beta y) + \delta(a_1 x + b_1 y) + \dots}{\alpha(\alpha x + \beta y) + \beta(a_1 x + b_1 y) + \dots}$$

On doit donc avoir la proportionnalité:

$$\alpha(\alpha x + \beta y) + \beta(a_1 x + b_1 y) = \lambda(\alpha x + \beta y)$$

$$\gamma(\alpha x + \beta y) + \delta(a_1 x + b_1 y) = \lambda(\gamma x + \delta y)$$

D'où:  $\alpha(a - \lambda) + \beta a_1 = 0$

$$\alpha b + \beta(b_1 - \lambda) = 0$$

et de même:  $\gamma(a - \lambda) + \delta a_1 = 0$

$$\gamma b + \delta(b_1 - \lambda) = 0$$

$\lambda$  doit être racine de l'équation:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & a_1 \\ b_1 & b - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

On tirera  $\frac{\alpha}{\beta}$  et  $\frac{\gamma}{\delta}$  d'une même équation du 2<sup>e</sup> degré donc ceseront les 2 racines distinctes.

— Nous avons étudié l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + \dots}{\alpha x + \beta y + \dots}$$

en supposant que:  $a b_1 - a_1 b \neq 0$ ,

cà d que le point  $(x_0, y_0)$  était un point simple des 2 courbes:



$$ax + by + \dots = 0$$

Si au contraire on a:

$$ax + by + \dots = 0.$$

$$ab_1 - a_1b = 0,$$

les 2 courbes sont tangentes à l'origine, et les résultats sont tout différents pour les intégrales. Posons encore:

$$y = tx$$

l'équation devient:  $t + x \frac{dt}{dx} = \frac{a_1 + b_1 t + x \left( \frac{a_1 + b_1 t}{a + bt + x} \right)}{a + bt + x}$

et par hypothèse, on a:

$$k(a + bt) = a_1 + b_1 t$$

Posons:  $a + bt = \mu x$

ou:  $t = \frac{\mu x - a}{b}$

$$\frac{\mu x - a}{b} + \frac{x}{b} \left[ \mu + x \frac{d\mu}{dx} \right] = \frac{k\mu + \dots}{\mu + \dots}$$

$\mu$  fonction de  $x$ .

Le coefficient de  $x^2$  est  $\frac{1}{b} \frac{d\mu}{dx}$ ; on est donc ramené à la forme:

$$x^2 \frac{d\mu}{dx} = ax + by$$

dont l'intégrale générale est:

$y = Ce^{-\frac{b}{a}x}$  dont le point  $x=0$  est un point singulier essentiel.

Si l'on cherche une intégrale holomorphe qui s'annule pour  $x=0$ , on peut calculer de proche en proche les coefficients de son développement; mais ce développement n'est pas convergent. On pose:

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

On substitue

$$x^2 (A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \dots) = ax + b(A_1 x + A_2 x^2 + \dots)$$

On égale les coefficients correspondants dans les 2 membres:

$a + bA_1 = 0$   $A_1 = bA_2 \dots$  en général:  $nA_n = bA_{n+1}$

Mais si l'on forme le rapport d'un terme au précédent, on trouve:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} x = \frac{nx}{b}$$

qui augmente indéfiniment avec  $n$ ,

si petit que puisse être  $x$  (à moins que  $x=0$ )

Il n'y a donc pas d'intégrale holomorphe.



Addition à la page 145.

Examinons le cas où  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  serait un entier positif, c'est-à-dire, dans l'équation :  $x \frac{dy}{dx} = ax + by + \dots$  ou :  $\frac{dY}{dx} = \frac{bY + \dots}{x}$

$b$  serait un entier positif ( $\lambda_1 = 1$ ). Supposons, pour préciser,  $b = 1$ . On a en général (pour  $b$  positif non entier) l'intégrale générale :  
 $u_2(x, Y) = Cx^b$

Faisons tendre  $b$  vers 1, et cherchons ce qui devient l'intégrale  $Y$ .  
 L'intégrale générale peut s'écrire :  $\frac{u_2(x, Y) - Cx}{b-1} = C \frac{x^b - x}{b-1}$

$Y$  est alors développé en une série suivant les nouvelles variables :  
 $x$  et  $\frac{x^b - x}{b-1}$ . Faisons  $b = 1$ , prenons les dérivées par rapport à  $b$ ;

$$\lim_{b \rightarrow 1} \frac{x^b - x}{b-1} = x \log x$$

La série qui représente  $Y$  reste convergente (nous nous dispensons de le démontrer; on le ferait toujours par la méthode de comparaison).  
 Donc l'équation différentielle proposée a une infinité d'intégrales holomorphes, s'annulant pour  $x=0$ , et développables en séries suivant les puissances de  $x$  et de  $x \log x$ .





